〔Ⅰ〕以下の問いに答えなさい。ただし, 解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 方程式

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$$

を解きなさい。

(2) $\vec{a}, \vec{b}$ を平面上のベクトルとします。$3\vec{a} + 2\vec{b}$ と $2\vec{a} - 3\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるとき, ベクトル $\vec{a} + \vec{b}$ の大きさ $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ の最大値を求めなさい。

(3) 座標平面上で運動する点が, x 座標か y 座標の少なくとも一方は整数である点のみを通って, 原点 (0, 0) から点 (6, 4) まで最短の道のりで移動することを考えます。ただし, 点 (4, 2) は通らないこととします。このとき, 移動する道順は何通りあるか求めなさい。

(4) 2 つの袋 A, B それぞれに, 赤玉 1 個, 白玉 3 個の合計 4 個ずつの玉が入っています。袋 A と 袋 B から同時に, 無作為に 1 つずつの玉を取り出し, それらの玉を交換して袋に戻すことを繰り返します。 n を自然数とするとき, n 回目の交換の後, 袋 A の中に赤玉がちょうど 1 個入っている確率を n を用いて表しなさい。

〔Ⅱ〕以下の問いに答えなさい。

(1)

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

の値を求めなさい。

(2) $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明しなさい。

(3) x^y の値が有理数になる無理数の組 (x, y) が存在することを証明しなさい。

〔Ⅲ〕正五角形 ABCDE の外接円の中心を O とします。また, 線分 AC と 線分 BE の交点を M とします。このとき, 以下の問いに答えなさい。

(1) $\mathrm{BC} = \mathrm{MC}$ であることを証明しなさい。

(2) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ の値を求めなさい。

(3) $\cos \dfrac{3\pi}{5}$ の値を求めなさい。

(4) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}$ の値を求めなさい。

(5) $\cos \dfrac{\pi}{5}$ の値を求めなさい。

〔Ⅳ〕以下の問いに答えなさい。

(1) n を 2 以上の自然数とするとき, 関数 $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ の導関数を求めなさい。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ を求めなさい。

(3) n を 3 以上の自然数とするとき, 部分積分法を用いて

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx = \frac{1}{1-n}\left(\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}\right)$$

が成り立つことを証明しなさい。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$ の値を求めなさい。