【I】(1) 係数が左右対称。相反方程式という。 $x^2 \neq 0$ で割って

$$x^2-8x+17-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

ここで $x+\frac{1}{x}=t$ とおけば $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$ だから原方程式は

$$t^2-8+15=0 \to (t-3)(t-5)=0 \to t=3,5$$

ア) $x+\frac{1}{x}=3 \to x^2-3x+1=0 \to x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

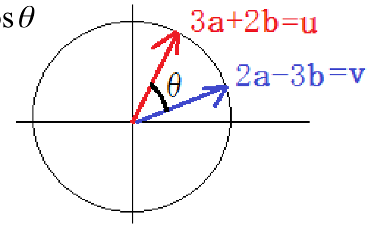
イ) $x+\frac{1}{x}=5 \to x^2-5x+1=0 \to x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ (答)

(2) $|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=1$,

$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=1$,

$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=6(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)-5\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\theta$

第 3 式において 2 つの単位ベクトル $3\vec{a}+2\vec{b}, 2\vec{a}-3\vec{b}$ のなす角を θ とした。 θ の値の取りうる範囲は $0\leq\theta<2\pi$ としてよい。右図に示したように連立方程式を解けばよいのだから。さて第 1 式と第 2 式を辺々足したり引いたりして、



$$\begin{cases} 3a_x+2b_x=u_x \\ 2a_x-3b_x=v_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_y+2b_y=u_y \\ 2a_y-3b_y=v_y \end{cases}$$

$$13(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=2$$

$$5(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)+24\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

だから

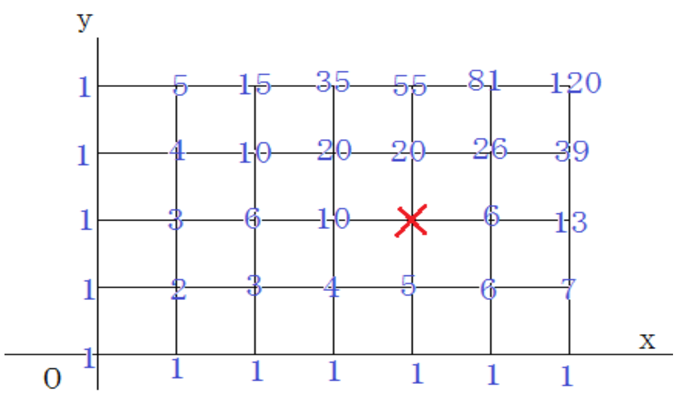
$$\cos\theta=6(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)-5\vec{a}\cdot\vec{b}=6\times\frac{-24\vec{a}\cdot\vec{b}}{5}-5\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{169}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

cos の値域から $-1\leq-\frac{169}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}\leq1 \to -\frac{5}{169}\leq\vec{a}\cdot\vec{b}\leq\frac{5}{169}$ となるので

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=\frac{2}{13}+2\vec{a}\cdot\vec{b}\leq\frac{2}{13}+2\times\frac{5}{169}=\frac{36}{169}$$,

$|\vec{a}+\vec{b}|\leq\frac{6}{13}$ (答)

(3) 右図のように格子点に足した数字を順次書いていけばよい。パスカルの三角形の応用で、120 通り(答)



(4) n 回目に

ア) A に赤が 1 個のとき

A と B の同色の玉を交換すればよいから、

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$$

の確率で、次の回も赤 1 個になる。

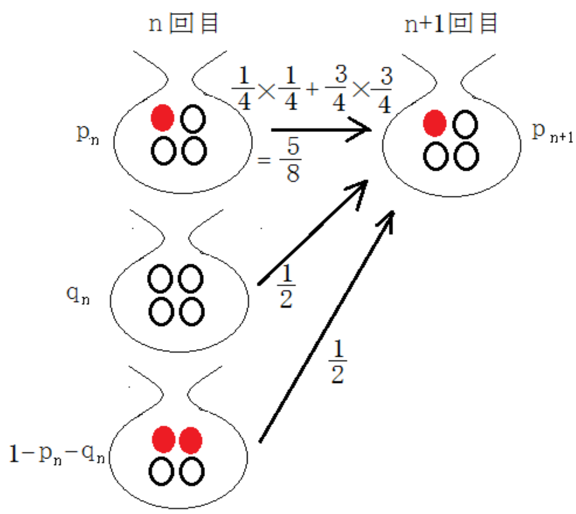
イ) A に赤が 0 個のとき

n 回目に赤 0 個になる確率を q_n とする。

B から赤をもらえばよいから、 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ の確率で、次の回は赤 1 個になる。

ウ) A に赤が 2 個のとき

n 回目に赤 2 個になる確率は $1-p_n-q_n$ である。B に赤をあげればよいから、 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ の確率で、次の回は赤 1 個になる。



結局、n+1 回目に A に赤 1 個になる確率は

$$p_{n+1}=\frac{5}{8}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}(1-p_n-q_n)=\frac{1}{8}p_n+\frac{1}{2}$$

この漸化式から一般項を求めよう。数列の極限値を α とすれば $\alpha=\frac{1}{8}\alpha+\frac{1}{2}\to\alpha=\frac{4}{7}$ だから

$$p_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}(p_n-\frac{4}{7})$$

と変形できると分かる。この数列の初項は $p_1-\frac{4}{7}=\frac{5}{8}-\frac{4}{7}=\frac{3}{56}$ だから

$$p_n=\frac{3}{56}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}$$ (答)

【II】(1) $(a^b)^c=a^{bc}$ だから $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2$ (答)

(2) $\sqrt{2}$ がもし有理数とし、 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ とする。整数である分母・子をそれぞれ素因数分解し、

$$m=m_1m_2\cdots m_t,\ n=n_1n_2\cdots n_s$$

とおく。分母を払って 2 乗すると

$$2\,m_1^2m_2^2\cdots m_t^2=n_1^2n_2^2\cdots n_s^2$$

左辺には素数が奇数個あり、右辺には素数が偶数個ある。これは素因数分解の一意性に矛盾する。したがって $\sqrt{2}$ は無理数である。

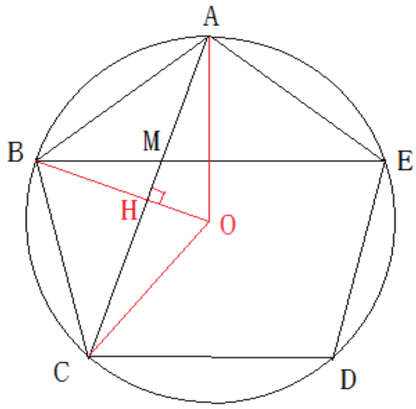
(3) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ って、なんだかよく分からない。でも、

ア) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数だったら、 $(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ が探している例だ。

イ) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数だったら、 $(x,y)=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}},\sqrt{2})$ が探している例だ。■

【蛇足】この問題の出典はたぶん『数学的に考える』キース・デブリン著、冨永星訳、ちくま学芸文庫、p.144 である。

【III】(1) 直線OAを軸にして対称だから対角線BEと辺CDは平行、同様にACとEDも平行。よって四角形CDEMは平行四辺形。対辺であるMCとEDは等しく、辺であるBCとEDも等しい。よってBC=MC ■



(2) △ABCと△AMBは相似である。なぜならば∠BAC＝∠MABが共通で、∠ACB＝∠ABMは辺を見込む円周角だから。したがって

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AM}=\frac{AB}{AC-MC}=\frac{AB}{AC-AB}=\frac{1}{\frac{AC}{AB}-1}$$

$x=\dfrac{AC}{AB}$ とおけば $x=\dfrac{1}{x-1}\to x^2-x-1=0\to x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (答)

(3) $\dfrac{3\pi}{5}=108^\circ$ と言えば∠ABCだ。余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\,AB\cdot BC}=\frac{2\,AB^2-AC^2}{2\,AB^2}=\frac{2-(\frac{AC}{AB})^2}{2}=\frac{2-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2}{2}$$

$$=\frac{8-(6+2\sqrt{5})}{8}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$ (答)

(4) 108°の補角は72°だから $\cos 72^\circ=\cos\dfrac{2\pi}{5}=-\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

さて図のようにOBとACの交点をHとすると、

$$\frac{AC}{OA}=2\times\frac{AH}{OA}=2\sin 72^\circ=2\sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16-(6-2\sqrt{5})}=\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$ (答)

(5) すでに (4) でcos72°は求まっているから半角の公式を使う。

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$ (答)

【IV】(1) $y'=\dfrac{-\sin x\cdot\sin^n x-\cos x\cdot n\sin^{n-1}x\cos x}{\sin^{2n}x}=-\dfrac{\sin^2 x+n\cos^2 x}{\sin^{n+1}x}$ (答)

【蛇足】n≧2 でなく n≧0 で成り立つ。

(2) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$,ここで $\cos x=t\,,-\sin x\,dx=dt$ と置換すれば

$$I=\int\frac{-dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\log|t-1|-\log|t+1|\right)=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

元の変数に戻して $I=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$ (答)

(3) $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx=\int\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin^n x}dx=\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin^n x}+\int\sin x\cdot\frac{\sin^2 x+n\cos^2 x}{\sin^{n+1}x}dx$

$$=\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\int\frac{\sin^2 x+n\cos^2 x}{\sin^n x}dx=\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}+n\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx$$

両辺に同類項があるのでまとめて

$$(1-n)\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx=\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}\quad,$$

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx=\frac{1}{1-n}\left(\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}\right)\quad\blacksquare$$

【蛇足】n≧3 でなく n≧2 で成り立つ。

(4) n=3 を代入すれば

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\sin x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+C$$

したがって

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}-\frac{1}{4}\left[\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{0}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{4}\left[\log 1-\log\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\div\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\log\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}-1\right)\quad(答)$$