[Ⅰ] 複素数 α, β, γ が $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ かつ $\alpha + \beta + \gamma = 0$ を満たすとき，以下の問に答えよ。

(1) α, β, γ を表す複素平面上の点が正三角形をなすことを示せ。

(2) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2} + \dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2} + \dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}$ の値を求めよ。

(3) n を 3 で割り切れない自然数とするとき $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ の値を求めよ。

[Ⅱ] 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ を C とする。C 上を動く点を $\mathrm{P}\left(t, \dfrac{1}{2}t^2\right)$ とし，d を正の定数とする。点 P において C に接する半径 d の円で，中心 Q の座標 (X, Y) が $Y \geqq \dfrac{1}{2}t^2$ を満たすものを考える。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 放物線 C の P における接線の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C の P における法線の方程式を求めよ。

(3) 中心 Q の y 座標 Y を t を用いて表せ。

(4) Y の極小値を求めよ。

[Ⅲ] 曲線 $x = g(y)$ の $y \geqq 0$ の部分と x 軸上の線分 $0 \leqq x \leqq g(0)$ のなす曲線を C とし，C を y 軸のまわりに 1 回転してできる容器を V とする。ただし，$g(y)$ は $y \geqq 0$ で定義された正の関数とする。V に毎秒一定量 v の水を注ぐとする。t 秒後の V 内の水位を $y = h(t)$ とするとき，以下の問に答えよ。

(1) 水位が一定の速さで上昇するとき，$g(y)$ は定数関数であることを示せ。

(2) $g(y) = e^y$ のとき，$h(t)$ を求めよ。

[Ⅳ] 箱の中にa個の赤玉とb個の白玉を合わせて2020個入れる。ただし，$a \geqq 1, b \geqq 1$とする。n人を一列に並べ，前から順に$1, 2, \ldots, n$と番号をつける。番号1の人から順に玉を1個取り出し，色を確認したら箱の中へ戻し最後尾に並び直す。これを赤玉が出るまで繰り返す。番号kの人が赤玉を引く確率を$p_k^{(n)}$，また，$\alpha = \dfrac{a}{a+b}$，$\beta = \dfrac{b}{a+b}$とするとき，以下の問に答えよ。

(1) $p_1^{(2)}$をβを用いて表せ。

(2) 各$k = 1, 2, \ldots, n-1$に対して，$\dfrac{p_{k+1}^{(n)}}{p_k^{(n)}}$を求めよ。

(3) 各$k = 1, 2, \ldots, n$に対して$q_k = \lim_{n \to \infty} p_k^{(n)}$とし，

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q_k$$

と定める。$a \geqq b$のとき，Eの値を最大にするようなa, bを求めよ。必要ならば，$|r| < 1$なる実数rに対して$\lim_{n \to \infty} n r^n = 0$となることを用いてよい。

[Ⅴ] 以下の問に答えよ。

(1) 関数$y = e^{|x-1|}$のグラフと関数$x = e^{|y-1|}$のグラフを一つの座標平面上に描け。

(2) 連立不等式 $|y| \leqq e^{|x-1|}$，$|y| \leqq e^{|x+1|}$，$|x| \leqq e^{|y-1|}$，$|x| \leqq e^{|y+1|}$の表す領域をDとする。このとき，Dを図示せよ。

(3) 領域Dの面積を求めよ。

(4) 領域Dをx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

[以 下 余 白]