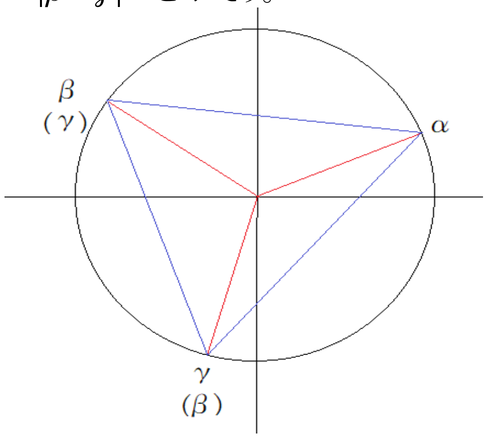
【I】(1)　$|\alpha-\beta|=|\beta-\gamma|$ を言えばよい。所与の式は対称だから、これが言えれば β と γ を交換して $|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma|$ も言えるからである。では $|\alpha-\beta|^2=|\beta-\gamma|^2$ を示そう。

$$|\alpha-\beta|^2-|\beta-\gamma|^2=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-(\gamma-\beta)(\bar{\gamma}-\bar{\beta})$$
$$=\{\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\}-\{\gamma\bar{\gamma}+\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\beta}-\bar{\gamma}\beta\}$$
$$=\alpha\bar{\alpha}-\gamma\bar{\gamma}-(\alpha-\gamma)\bar{\beta}-(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})\beta$$
$$=|\alpha|^2-|\gamma|^2-(\alpha-\gamma)\bar{\beta}-(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})\beta$$
$$=1^2-1^2-(\alpha-\gamma)\bar{\beta}-(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})\beta$$



ところで $\bar{\beta}=-(\bar{\alpha}+\bar{\gamma}),\beta=-(\alpha+\gamma)$ だから上式は

$$=(\alpha-\gamma)(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})+(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})(\alpha+\gamma)$$
$$=2|\alpha|^2-2|\gamma|^2+\alpha\bar{\gamma}-\bar{\alpha}\gamma+\bar{\alpha}\gamma-\alpha\bar{\gamma}=0$$

となる。

(2) 正三角形が分かったから、必要に応じて β と γ を交換して、3 点 α,β,γ を $\beta=\omega\alpha,\gamma=\omega^2\alpha$ としてよい。ただし $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である。 $\omega^3=1$ だから

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha\cdot\omega\alpha}{\omega^4\alpha^2}+\frac{\omega\alpha\cdot\omega^2\alpha}{\alpha^2}+\frac{\omega^2\alpha\cdot\alpha}{\omega^2\alpha^2}=\frac{1}{\omega^3}+\omega^3+1=3 \quad \text{(答)}$$

(3) 前問と同様に

$$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=(1+\omega^n+\omega^{2n})\alpha^n$$

と変形。 $n=3k+1\to 2n=6k+2$ または $n=3k+2\to 2n=3(2k+1)+1$ だから

$$\omega^n=\omega,\omega^{2n}=\omega^2 \quad \text{または} \quad \omega^n=\omega^2,\omega^{2n}=\omega$$

となる。したがって $\omega^2+\omega+1=0$ より

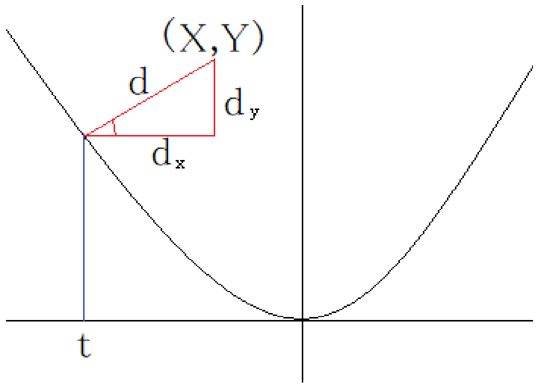
$$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n=(1+\omega^n+\omega^{2n})\alpha^n=(1+\omega+\omega^2)\alpha^n=0 \quad \text{(答)}$$

【II】(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2\to y'=x$ だから接線は

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)$$

(2) 法線は $t\neq 0$ のとき $y-\dfrac{1}{2}t^2=-\dfrac{1}{t}(x-t)$ であり、 $t=0$ のときは $x=0$

(3) 半径 d の y 軸への正射影を d_y とし、法線の傾きを $\tan\theta=-\dfrac{1}{t}$ とすれば



$$\frac{d_y}{d}=\sin\theta$$

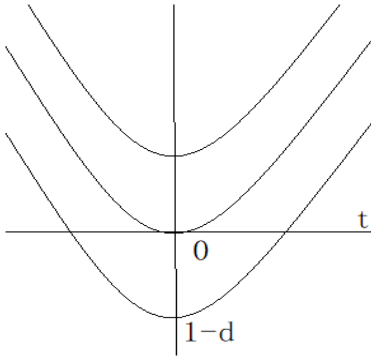
だが $\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=1+t^2$ だから

$$d_y=d\sin\theta=\frac{d}{\sqrt{t^2+1}}$$

よって

$$Y=\frac{1}{2}t^2+\frac{d}{\sqrt{t^2+1}}$$

(3) 微分して



$$\frac{dY}{dt}=t-d\cdot 2\frac{t}{2\sqrt{(t^2+1)^3}}=t(1-\frac{d}{\sqrt{(t^2+1)^3}})$$
$$=t\cdot\frac{\sqrt{(t^2+1)^3}-d}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$$

これの零点を求めよう。最終辺の分数の分母をグラフにすると右図のようになる。これの最小値と0との大小関係により場合分け。

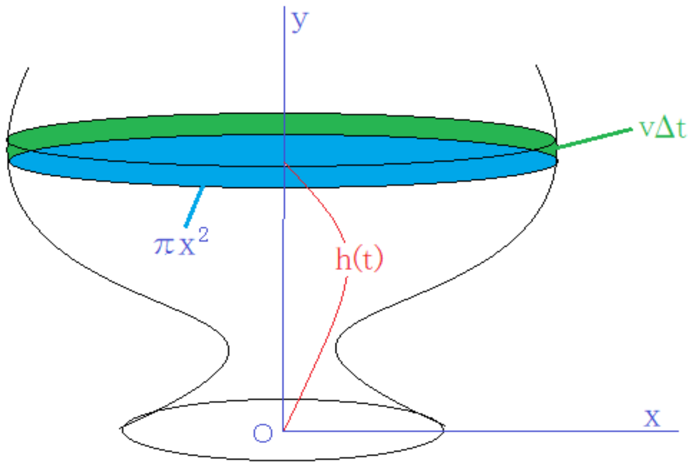
(ア)　$1-d<0$　すなわち　$d>1$　のとき
$$t^2+1=d^{2/3}\to t=\pm\sqrt{d^{2/3}-1}$$
が零点であり、 $t=0$　と合わせれば臨界点は3つある。このうち極小になるのは　$t=\pm\sqrt{d^{2/3}-1}$　のときで、極小値は
$$Y=\frac{1}{2}t^2+\frac{d}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}(d^{2/3}-1)+\frac{d}{d^{1/3}}=\frac{3}{2}d^{2/3}-\frac{1}{2}$$

(イ)　$d=1$　のとき

臨界点は　$t=0$　で　$\frac{dY}{dt}$　の符号は負から正に変わるからここが極小。極小値は
$$Y=\frac{1}{2}t^2+\frac{d}{\sqrt{t^2+1}}=0+\frac{d}{1}=d$$

(ウ)　$d<1$　のときは(イ)と同然であって、極小値は
$$Y=d$$

【III】(1) 時刻　t　から　$t+\Delta t$　にかけてどれだけ水量が増えたかというと



$$\pi x^2(h(t+\Delta t)-h(t))=v\Delta t$$
である。両辺を　Δt　で割って
$$\pi g(y)^2\cdot\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}=v$$
極限移行して
$$\pi g(y)^2\cdot h'(t)=v\quad\cdots(*)$$
今、水位の上昇速度が一定だから
$$h'(t)=k(\textbf{定数})$$
とおけば
$$g(y)^2=\frac{v}{\pi k}\to g(y)=\sqrt{\frac{v}{\pi k}}$$
v　も定数であるから　$g(y)$　が定数関数であることが分かった。

(2) (*) より
$$\pi e^{2y}\cdot h'(t)=v\to\pi e^{2h}\cdot h'=v$$
これを　t　で積分すると
$$\pi e^{2y}\cdot h'(t)=v\to\pi e^{2h}\cdot h'=v$$
ここで　$t=0$　のとき　$h=0$　, すなわち　$h(0)=0$　であるので　$C=\frac{\pi}{2}$　. よって
$$e^{2h}=\frac{2}{\pi}(vt+\frac{\pi}{2})=\frac{2vt}{\pi}+1$$
対数をとって

$$2h=\log\left(\frac{2vt}{\pi}+1\right)\rightarrow h=\log\sqrt{\frac{2vt}{\pi}+1}$$ (答)

【IV】(1) 2 人でゲームをするとき、先手が赤を当てる確率である。1 発で当てる確率が α で、2 巡目で当たるのはそれまで白が出続ければよいから $\beta\times\beta\times\alpha=\alpha\beta^2$, 3 巡目で当たるのは $\beta\times\beta\times\beta\times\beta\times\alpha=\alpha\beta^2$, …… を無限に足して

$$p_1^{(2)}=\alpha+\alpha\beta^2+\alpha\beta^4+\cdots=\alpha(1+\beta^2+\beta^4+\cdots)=\alpha\times\frac{1}{1-\beta^2}=\frac{1-\beta}{1-\beta^2}=\frac{1}{1+\beta}$$ (答)

(2) 分母を求めよう。k 君が 1 巡目で当たるのは彼より先手はすべて白で、k 君だけ赤だから

$$\beta\times\beta\times\beta\times\cdots\times\alpha=\alpha\beta^{k-1}$$

2 巡目で当たるのは

$$\beta^{k-1}\times\beta^n\times\alpha=\alpha\beta^{n+k-1}$$

3 巡目で当たるのは

$$\beta^{k-1}\times(\beta^n)^2\times\alpha=\alpha\beta^{2n+k-1}$$

……

無限和を求めると

$$p_k^{(n)}=\alpha\beta^{k-1}+\alpha\beta^{n+k-1}+\alpha\beta^{2n+k-1}+\cdots=\alpha\beta^{k-1}(1+\beta^n+\beta^{2n}+\cdots)=\frac{\alpha\beta^{k-1}}{1-\beta^n}$$

比を求めれば

$$\frac{p_{k+1}^{(n)}}{p_k^{(n)}}=\frac{\alpha\beta^k}{1-\beta^n}/\frac{\alpha\beta^{k-1}}{1-\beta^n}=\beta$$ (答)

(3) 極限をとって

$$q_k=\lim_{n\to\infty}p_k^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\beta^{k-1}}{1-\beta^n}=\alpha\beta^{k-1}$$

よって

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}k\,q_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha k\beta^{k-1}=\alpha(1+2\beta+3\beta^2+\cdots)$$

だが、この和を第 n 部分和の極限

$$E=\lim_n\alpha(1+2\beta+3\beta^2+\cdots+n\beta^{n-1})$$

として求めよう。これに β を掛けた、

$$\beta E=\lim_n\alpha(\beta+2\beta^2+3\beta^3+\cdots+n\beta^n)$$

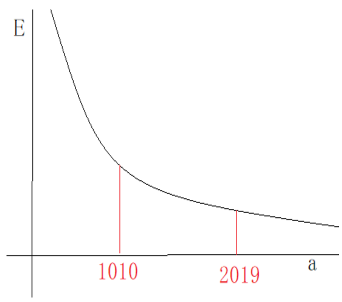
を、上から引くと

$$(1-\beta)E=\lim_n\alpha(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{n-1}-n\beta^n)=\lim_n\alpha\left(\frac{1-\beta^n}{1-\beta}-n\beta^n\right)=\frac{\alpha}{1-\beta}$$

よって

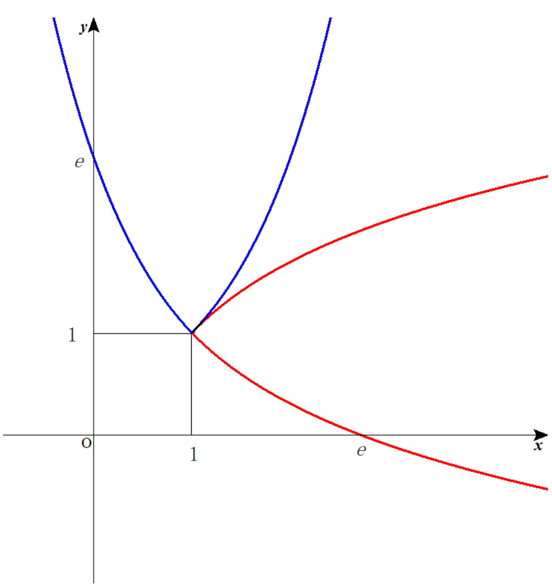
$$E=\frac{\alpha}{(1-\beta)^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}=\frac{a+b}{a}=\frac{2020}{a},\ b=2020-a\leq a\leq 2020-1$$,

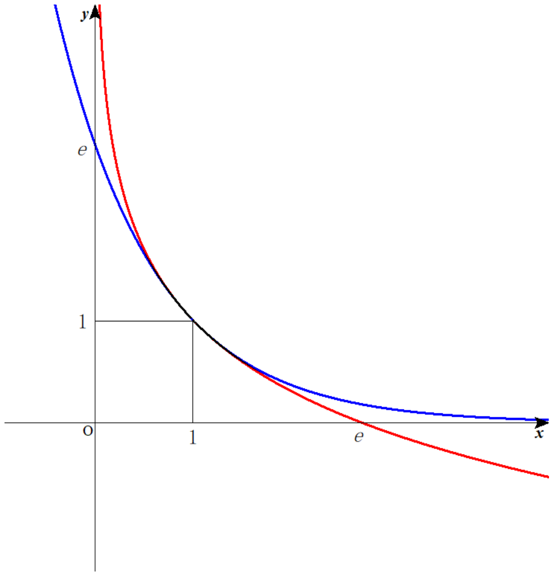
$$E=\frac{2020}{a},\ 1010\leq a\leq 2019$$



最大値は $E=2$ で $a=b=1010$ (答) のときである。

【V】(1) 1 つ目のグラフの描き方は　$y=e^x, x\geq 0$　のグラフを　x　軸方向に 1 だけ平行移動し、直線　$x=1$　を対称軸としてそれの鏡映を描いて 2 つを合体する。　$x=e^{|y-1|}$　の方は今のグラフを直線　$y=x$　について鏡映する。



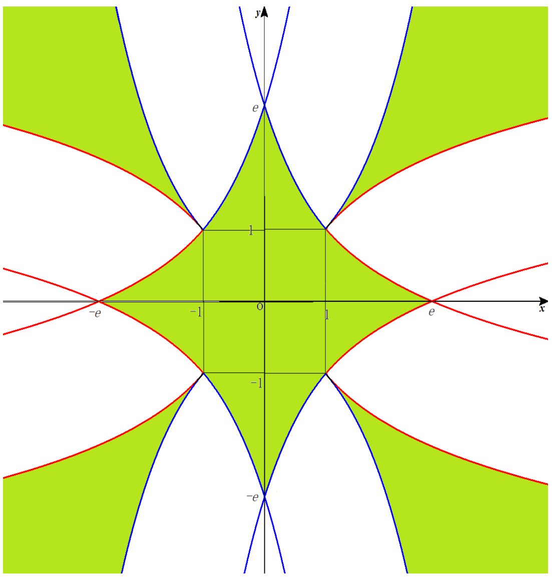


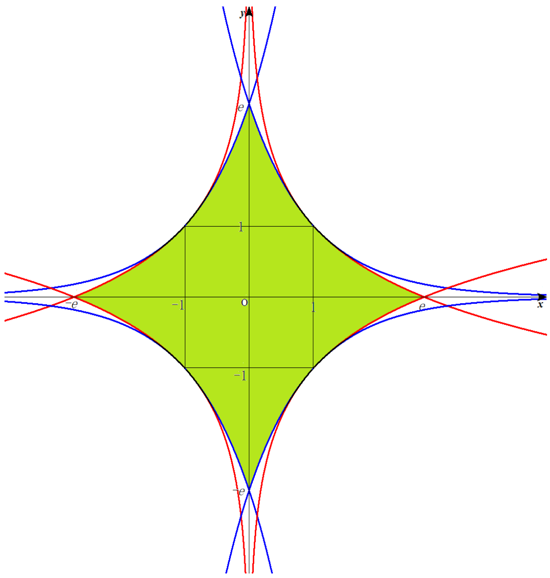
だから正解は上図(左)なのだが、このあとの問題(3), (4) のことを考えると本当の問題は

$$y=e^{-(x-1)}, x=e^{-(y-1)}$$

のグラフを描け、だったのだろう。(負号と絶対値を取り違えた。) それなら本来の答は上図(右)である。

(2)　$|y|\leq f(x)\Leftrightarrow -f(x)\leq y\leq f(x)$　であることと、　$y=e^{|x+1|}$　のグラフは　$x=-1$　で鏡映をとることに注意。答は下図(左)。





ここでも本来の問題は

$$|y|\leq e^{-(x-1)}, |y|\leq e^{x+1}, |x|\leq e^{-(y-1)}, |x|\leq e^{y+1}$$

だったのだろう。それだったら正解は上図(右)である。

(3) 領域 D が右側の図であったとして解いてみよう。第 1 象限の直線　$y=x$　の上側部分の面積を計算して 8 倍すればよい。

$$S=8\int_0^1(e^{-x+1}-x)\,dx=8\Big[-e^{-x+1}-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1=8\Big(e-1-\frac{1}{2}\Big)=8e-12$$ (答)

(4) ここでも右側の図であったとして解く。第 1 象限で x=0～1 と x=1～e に分けて計算する。

$$V_1=\pi\int_0^1 e^{-2x+2}\,dx=\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-2x+2}\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

後半は　$x=e^{-(y-1)} \Leftrightarrow \log x=-(y-1) \Leftrightarrow y=1-\log x$　より

$$V_2=\pi\int_1^e(1-\log x)^2\,dx=\pi\int_1^e\{1-2\log x+(\log x)^2\}\,dx$$

ところで部分積分により

$$\int_1^e\log x\,dx=[x\log x]_1^e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1\quad,$$

$$\int_1^e(\log x)^2\,dx=[x(\log x)^2]_1^e-\int_1^e 2\log x\,dx=e-2$$

だから

$$V_2=\pi\{(e-1)-2+(e-2)\}=\pi(2e-5)$$

よって求めるべき体積は

$$V=2(V_1+V_2)=2\Big\{\frac{\pi}{2}(e^2-1)+\pi(2e-5)\Big\}=\pi(e^2+4e-11)$$ (答)