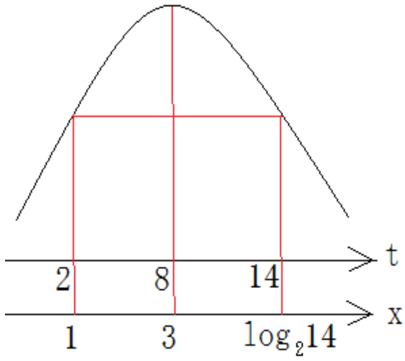
第1問

【1】(1)　$y=-(2^x)^2+2^4 2^x-48=-t^2+16t-48=-(t-8)^2+16$　だから

$$y(x=1)=y(t=2)=-(2-8)^2+16=-20$$

$x\geq 1 \Leftrightarrow t\geq 2$　では頂点で最大だから、最大値は

$$y(t=8)=y(x=3)=16$$



(2) 軸をはさんで左端点の反対側の点は　$t=2^x=14$

よって　$x=\log_2 14$

また　$3=\log_2 8<\log_2 14<\log_2 16=4$　より　$\log_2 14=3.\cdots$

最大の整数値は 3 である。

(3)　$y=-t^2+16t-48=-(t-4)(t-12)=0$

零点の小さい方は　$t=2^x=4\rightarrow x=2$　, 大きい方は

$$t=2^x=12\rightarrow x=\log_2 12=\frac{\log_{10}12}{\log_{10}2}=\frac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}2}=2+\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=2+\frac{0.4771}{0.3010}=3.5\cdots$$　より

$3.5<x<3.6$

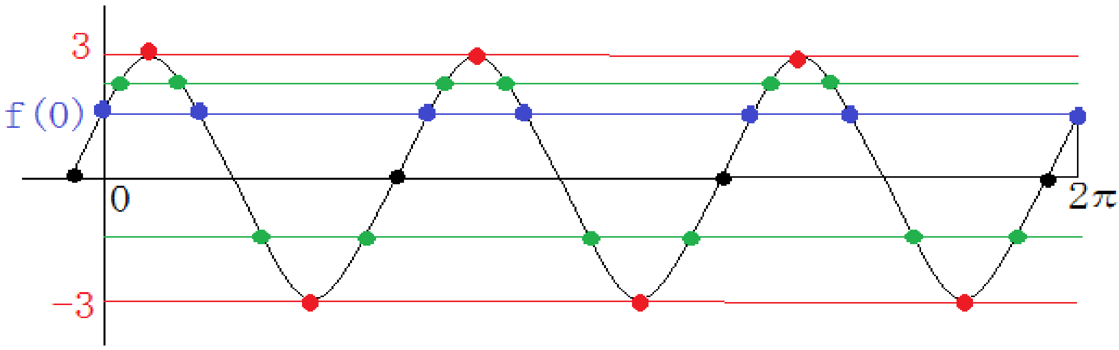
【2】(1)　$f(x)=\sqrt{3}(\cos 3x\cdot\frac{1}{2}-\sin 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})+\sqrt{3}\cos 3x$

$$=-\frac{3}{2}\sin 3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos 3x=3\{\sin 3x\cdot(-\frac{1}{2})+\cos 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$=3\sin(3x+\frac{2}{3}\pi)$$

これは　$3\sin 3(x+\frac{2}{9}\pi)$　と変形できるから x 軸の負の方向に少し動かして振幅を 3 倍したものだから最大値は 3 で、周期 T は　$3T=2\pi\rightarrow T=\frac{2}{3}\pi$　と分かる。

(2) グラフは下図の通り。(黒丸は周期の境目を示す。)



$|t|>3$　ならサインカーブとぶつからず N=0.

$t=3$　なら最大点とぶつかって(赤丸の) N=3.

$t=f(0)$　なら区間の左端と右端でダブってカウントされるから(青丸の) N=7.

$|t|<3\wedge t\neq f(0)$　なら 1 周期について 2 回ぶつかって(緑の丸の) N=2 ×3=6.

$t=-3$　なら最大点と同様で(赤丸の) N=3.

【答】ア＝－、イ＝8、ウエ＝16、オカキ＝－20、ク＝3、ケコ＝16、サシ＝14、ス＝3、セ＝2、ソ＝⑥、タ＝3、チ＝2、ツ＝3、テ＝3、ト＝3、ナ＝2、ニ＝3、ヌ＝3、ネ＝2、ノ＝3、ハ＝0、ヒ＝3、フ＝7、ヘ＝6、ホ＝3

第 2 問

(1)　$f'(x)=3x^2 \to f'(-1)=3$　だから、接線は

$$y-(-2)=3(x-(-1)) \to y=3x+1$$

距離の公式は　$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　だから　$d=\dfrac{|3\times 0-0+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(2)　$g'(x)=3x^2+2ax+b \to g'(-1)=3-2a+b=3$　のように傾きが一致する。あとは点 A を通ればよいから　$g(-1)=-1+a-b+c=-2$　. 2 つの方程式を再記すると

$$-2a+b=0\,,\, a-b+c=-1$$

だが、a を定数扱いして解くと

$$b=2a\,,\, c=a-1\quad .$$

(3) a= - 2 なら　$g(x)=x^3-2x^2-4x-3$　だから

$$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)\quad .$$

極大値は　$g(\frac{-2}{3})=\frac{-8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}-3=\frac{-41}{27}$　, 極小値は　$g(2)=8-8-8-3=-11$　.

(4) 2 つのグラフの上下関係を調べるために差を取ると

$$f(x)-g(x)=(x^3-1)-(x^3+ax^2+2ax+a-1)=-(ax^2+2ax+a)=-a(x+1)^2\geq 0$$

より常に　$f(x)\geq g(x)$　となる。面積は定積分一発で求まり

$$S=\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\{-a(x+1)^2\}dx=-\frac{a}{3}[(x+1)^3]_{-2}^{1}=-\frac{a}{3}\{8-(-1)\}=-3a$$

【答】ア＝3、イ＝3、ウ＝1、エオ＝10、カ＝3、キ＝2、ク＝a 、ケ＝1、コサ＝－2、シ＝3、スセソ＝－41、タチ＝27、ツ＝2、テトナ＝－11、ニ＝③、ヌネ＝－3

第 3 問

(1)　$a_4=a_2=1\,,\, a_5=a_2+a_3=3\,,\, a_6=a_3=2\,,\, a_7=a_3+a_4=3$

また

$$a_{18}=a_9=a_4+a_5=a_2+a_5=1+3=4\quad ,$$

$$a_{38}=a_9+a_{10}=a_4+a_5+a_5=1+3+3=7\quad ,$$

(2) $a_{3\cdot 2^k}=a_{3\cdot 2^{k-1}}=\cdots=a_3=2$

(3) 第k群の初項の 1 つ前までに何項あるかと言えば

$$2+2^1+2^2+\cdots+2^{k-1}\quad 項$$

である。ところで

$$2^1+2^2+\cdots+2^{k-1}=\sum_{j=1}^{k-1}2^j=\frac{2\left(2^{k-1}-1\right)}{2-1}=2^k-2$$

だから第 k 群の初項は

$$a_n,\ n=2+\left(2^k-2\right)+1=2^k+1$$

すなわち a_{2^k+1} である。

第 k 群の最後の項は第(k+1)群の初項の 1 項手前だから

$$a_n,\ n=2^{k+1}+1-1=2^{k+1}$$

すなわち $a_{2^{k+1}}$ である。

第 k 群の項の和は

$$S_k=a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}$$

で、そのうち奇数番目だけの和は

$$T_k=a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}-1}$$

で、偶数番目だけの和は

$$U_k=a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}$$

である。よって k=1 なら

$$S_1=a_3+a_4=2+1=3\quad ,$$

k=2 なら

$$S_2=a_5+\cdots+a_8=3+2+3+a_8=8+1=9\quad ,$$

$$T_2=a_5+a_7=3+3=6\quad ,$$

$$U_2=a_6+a_6=2+1=3$$

(4) 偶数番目の和は半分番目の和として

$$U_{k+1}=a_{2^{k+1}+2}+\cdots+a_{2^{k+2}}=a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}=S_k$$

となる。また偶数番目の和は

$$T_{k+1}=a_{2^{k+1}+1}+a_{2^{k+1}+3}+\cdots+a_{2^{k+2}-1}=\left(a_{2^k}+a_{2^k+1}\right)+\left(a_{2^k+1}+a_{2^k+2}\right)+\cdots+\left(a_{2^{k+1}-1}+a_{2^{k+1}}\right)$$

$$=a_{2^k}+2\left(a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}-1}\right)+a_{2^{k+1}}=a_{2^k}+2S_k-a_{2^{k+1}}=2S_k\quad ,$$

よって

$$S_{k+1}=T_{k+1}+U_{k+1}=2S_k+S_k=3S_k$$

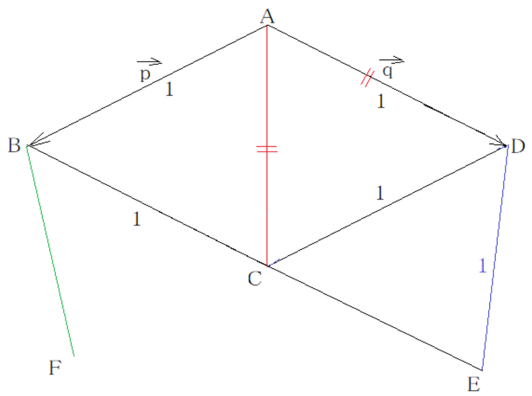
(4) 漸化式をまとめると

$$S_{k+1}=3S_k,\ T_{k+1}=2S_k,\ U_{k+1}=S_k$$

だから $S_k=3^k,\ T_k=2\cdot 3^{k-1},\ U_k=3^{k-1}$

【答】ア＝1、イ＝3、ウ＝2、エ＝3、オ＝4、カ＝7、キ＝2、ク＝2、ケ＝②、コ＝2、サ＝1、シ＝③、ス＝3、セ＝9、ソ＝6、タ＝3、チ＝⓪、ツ＝④、テ＝⑧、ト＝⑨、ナ＝⑤、ニ＝①

第 4 問



(1) $\overrightarrow{BD}=\vec{q}-\vec{p}$ だから

$$|\overrightarrow{BD}|^2=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$
$$=2-2x$$

(2) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\vec{p}+(s-1)\vec{q}$ だから

$$|\overrightarrow{DE}|^2=|\vec{p}|^2+2(s-1)\vec{p}\cdot\vec{q}+(s-1)^2|\vec{q}|^2$$
$$=1+2(s-1)x+(s-1)^2=1 \quad ,$$

$s\neq 1$ より $2x+(s-1)=0\to s=-2x+1$

(3) $|\overrightarrow{BE}|=|s\vec{q}|=|s|$ だから $|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2$ より

$$2-2x=s^2$$

x<0 に注意して 2 式を連立して解くと

$$2-2x=(-2x+1)^2\to 4x^2-2x-1=0\to x=\frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad .$$

したがって

$$s=-2x+1=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \overrightarrow{AE}=\vec{p}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}$$

(4) AC に関して折り返すには $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を交換すればよい。よって

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q} \quad .$$

したがって

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\vec{q}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(\vec{p}-\vec{q})=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{DB} \quad .$$

また

$$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BE}|=|(-2x+1)\vec{q}|=|-2x+1|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

を得るので、

$$|\overrightarrow{EF}|=\left|\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right||\overrightarrow{DB}|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1$$

(5) $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{q}-(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q})=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$ であり

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FM}=-\frac{1}{2}\vec{q}\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q})=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}x-\frac{1}{4}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}=0$$

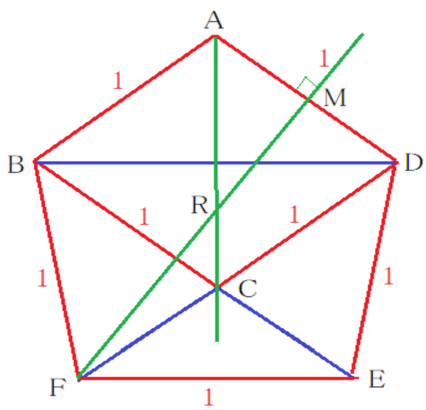
だから、たしかに $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{FM}$ は直交する。

$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AM}$ と $\overrightarrow{DB}$ が直交することから

$$\{t(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{p}+\vec{q})+\frac{1-t}{2}\vec{q}\}\cdot(\vec{p}-\vec{q})$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}t+\frac{1-\sqrt{5}t}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}-\frac{1+t}{2}$$
$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{8}t-\frac{3+\sqrt{5}}{8}=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

よって

$$\overrightarrow{AR}=\frac{5+\sqrt{5}}{10}(\vec{p}+\vec{q})$$



【答】ア＝2、イ＝2、ウエ＝－2、オ＝1、カ＝1、キ＝5、ク＝4、ケ＝1、コ＝5、サ＝2、シ＝1、ス＝5、セ＝2、ソタ＝－1、チ＝5、ツ＝2、テ＝1、ト＝5、ナ＝2、ニ＝1、ヌ＝5、ネ＝5、ノハ＝10

第 5 問

(1) 表の 6 つの数字を足せば 100％になるはず。よってアイに入るべきは 12％である。
今回投票は 1 行目を全部足して 45+12+3=60%だから、確率は 0.60 である。
前回投票は 1 列目を足して 45+10=55 運否%だから、確率は 0.55 である。

今回棄権かつ前回投票は 10％でから、確率は 0.10, 二項分布 B(n , p) の p は 0.10 である。
この二項分布の平均は

$$n\,p=900\times0.10=90 \quad (人)$$

標準偏差は

$$\sqrt{n\,p(1-p)}=\sqrt{90\times0.90}=\sqrt{81}=9.0 \quad (人)$$

である。z 変換の式は

$$Z=\frac{X-90}{9.0}$$

だから z 値は

$$z=\frac{105-90}{9.0}=1.666\cdots=1.67$$

これを正規分布表で引くと 0 人～105 人に落ちる確率は 0.4525 である。よって 105 人以上は

$$0.5-0.4525=0.0475 \fallingdotseq 0.05$$

(2) 正規分布表から分かるように 0.4750 の 2 倍で $P(|Z|\leq1.96)=0.95$ である。z変換の式より次の範囲に落ちる確率が 0.95 になる。

$$\left|\frac{X-p}{\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}}\right|\leq1.96 \quad ,$$

すなわち

$$p-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}\leq X\leq p+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \quad ,$$

この範囲の幅は

$$L=1.96\times2\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

r =0.5, L = 0.1 なら

$$0.1=1.96\times2\sqrt{\frac{0.5^2}{n}}\rightarrow\sqrt{n}=\frac{1.96\times2\times0.5}{0.1}=1.96\times10 \quad ,$$

$$n=1.96^2\times100=3.84\times100=384 \quad (人)$$

$$L=1.96\times2\sqrt{\frac{r(1-r)}{384}}=\frac{2\times1.96}{\sqrt{384}}\sqrt{r(1-r)}$$ だが相加・相乗平均の関係から

$$1=r+(1-r)\geq2\sqrt{r(1-r)}$$

で等号が成り立つのは $r=1-r=0.5$ のときで、このときに L は最大となる。

【答】アイ＝12、ウエ＝60、オカ＝55、キク＝10、ケコ＝90、サシ＝9．0、スセ＝05、ソ＝⑤、タチツ＝384、テ＝①