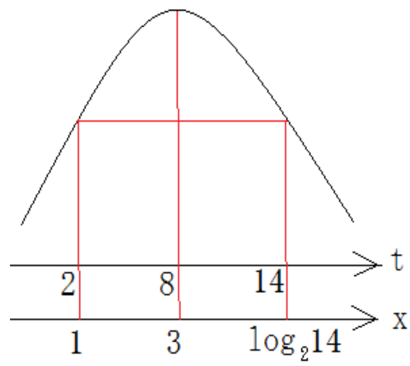
第 1 問

【1】(1)　$y=-(2^x)^2+2^4 2^x-48=-t^2+16t-48=-(t-8)^2+16$　だから

$$y(x=1)=y(t=2)=-(2-8)^2+16=-20$$

$x\geq 1 \Leftrightarrow t\geq 2$　では頂点で最大だから、最大値は

$$y(t=8)=y(x=3)=16$$



(2) 軸をはさんで左端点の反対側の点は　$t=2^x=14$

よって　$x=\log_2 14$

また　$3=\log_2 8<\log_2 14<\log_2 16=4$　より　$\log_2 14=3.\cdots$

最大の整数値は 3 である。

(3)　$y=-t^2+16t-48=-(t-4)(t-12)=0$

零点の小さい方は　$t=2^x=4\to x=2$　, 大きい方は

$$t=2^x=12\to x=\log_2 12=\frac{\log_{10}12}{\log_{10}2}=\frac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}2}=2+\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=2+\frac{0.4771}{0.3010}=3.5\cdots$$　より

$3.5<x<3.6$

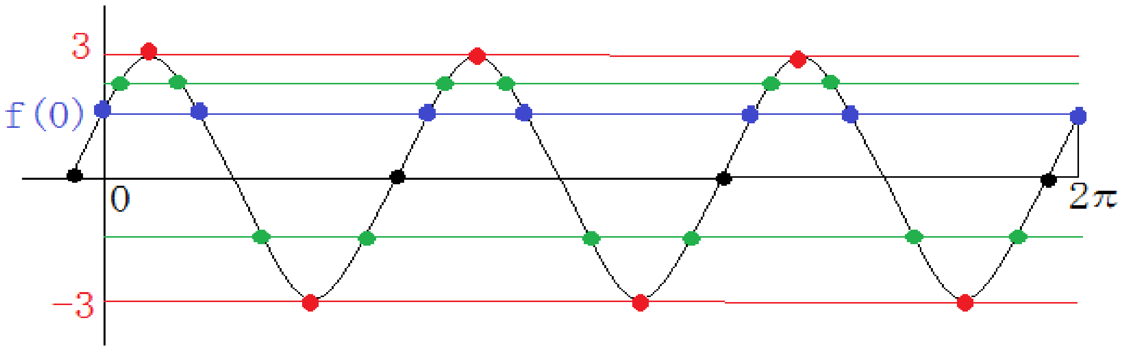
【2】(1)　$f(x)=\sqrt{3}(\cos 3x\cdot\frac{1}{2}-\sin 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})+\sqrt{3}\cos 3x$

$$=-\frac{3}{2}\sin 3x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos 3x=3\{\sin 3x\cdot(-\frac{1}{2})+\cos 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$=3\sin(3x+\frac{2}{3}\pi)$$

これは　$3\sin 3(x+\frac{2}{9}\pi)$　と変形できるから x 軸の負の方向に少し動かして振幅を 3 倍したものだから最大値は 3 で、周期 T は　$3T=2\pi\to T=\frac{2}{3}\pi$　と分かる。

(2) グラフは下図の通り。(黒丸は周期の境目を示す。)



$|t|>3$　ならサインカーブとぶつからず N=0.

$t=3$　なら最大点とぶつかって(赤丸の) N=3.

$t=f(0)$　なら区間の左端と右端でダブってカウントされるから(青丸の) N=7.

$|t|<3\land t\neq f(0)$　なら 1 周期について 2 回ぶつかって(緑の丸の) N=2 ×3=6.

$t=-3$　なら最大点と同様で(赤丸の) N=3.

【答】ア＝－、イ＝8、ウエ＝16、オカキ＝－20、ク＝3、ケコ＝16、サシ＝14、ス＝3、セ＝2、ソ＝⑥、タ＝3、チ＝2、ツ＝3、テ＝3、ト＝3、ナ＝2、ニ＝3、ヌ＝3、ネ＝2、ノ＝3、ハ＝0、ヒ＝3、フ＝7、ヘ＝6、ホ＝3

第 2 問

(1)　$f'(x)=3x^2 \to f'(-1)=3$　だから、接線は

$$y-(-2)=3(x-(-1)) \to y=3x+1$$

距離の公式は　$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　だから　$d=\dfrac{|3\times 0-0+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(2)　$g'(x)=3x^2+2ax+b \to g'(-1)=3-2a+b=3$　のように傾きが一致する。あとは点 A を通ればよいから　$g(-1)=-1+a-b+c=-2$　. 2 つの方程式を再記すると

$$-2a+b=0\,,\, a-b+c=-1$$

だが、a を定数扱いして解くと

$$b=2a\,,\, c=a-1 \quad .$$

(3) a= - 2 なら　$g(x)=x^3-2x^2-4x-3$　だから

$$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2) \quad .$$

極大値は　$g(\frac{-2}{3})=\frac{-8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}-3=\frac{-41}{27}$　, 極小値は　$g(2)=8-8-8-3=-11$　.

(4) 2 つのグラフの上下関係を調べるために差を取ると

$$f(x)-g(x)=(x^3-1)-(x^3+ax^2+2ax+a-1)=-(ax^2+2ax+a)=-a(x+1)^2 \geq 0$$

より常に　$f(x) \geq g(x)$　となる。面積は定積分一発で求まり

$$S=\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\{-a(x+1)^2\}dx=-\frac{a}{3}[(x+1)^3]_{-2}^{1}=-\frac{a}{3}\{8-(-1)\}=-3a$$

【答】ア＝3、イ＝3、ウ＝1、エオ＝10、カ＝3、キ＝2、ク＝a 、ケ＝1、コサ＝－2、シ＝3、スセソ＝－41、タチ＝27、ツ＝2、テトナ＝－11、ニ＝③、ヌネ＝－3

第 3 問

(1) 直交する直線は　$y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \to x+2y-3=0$　. 点 B, C はいずれも　$y=0$　を代入して

$$2x-1=0 \to B(\frac{1}{2},0) \quad , \quad x+0-3=0 \to C(3,0) \quad .$$

(2) 円の式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおけば

$$A \to 2+l+m+n=0 \quad ,$$
$$B \to \frac{1}{4}+\frac{1}{2}l+n=0 \quad ,$$
$$C \to 9+3l+n=0$$

の連立方程式ができる。これを解くと $l=-\frac{7}{2}, m=0, n=\frac{3}{2}$ だから、求めるべき円は

$$x^2+y^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$$

(3) 連立方程式を解いて

$$2x-1=k \to D\left(\frac{k+1}{2}, k\right) \quad , \quad x+2k-3=0 \to E(-2k+3, k) \quad .$$

$k=0$ になれば y 座標が 0 になって D, E に一致する。
三角形の面積は底辺×高さ÷2 で

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\left(3-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{5}{4} \quad ,$$
$$\triangle ADE=\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{k+1}{2}-(-2k+3)\right\}(k-1)=\frac{5}{4}(k-1)^2 \quad .$$

面積が等しいのは $\frac{5}{4}(k-1)^2=\frac{5}{4} \to k^2-2k=0 \to k=0, 2$ のとき。
2 倍になるのは $\frac{5}{4}(k-1)^2=\frac{10}{4} \to k^2-2k-1=0 \to k=1\pm\sqrt{2}$

【答】ア＝2、イ＝3、ウ＝1、エ＝2、オ＝3、カ＝7、キ＝2、ク＝3、ケ＝2、コ＝1、サ＝2、
シス＝－2、セ＝3、ソ＝0、タ＝5、チ＝4、ツ＝5、テ＝4、ト＝1、ナ＝2、ニ＝2、ヌ＝1、ネ＝2

第 4 問

(1) s = t = 0 なら

$$f(x)=x(x-a), f(x-3)=(x-3)(x-a-3)$$

だから、 $f(x)f(x-3)=x(x-3)(x-a)(x-a-3)$.
同様に、 $g(x)g(x-3)=x(x-3)(x-b)(x-b-3)$.
よって

$$h(x)=x(x-3)\{(x-a)(x-a-3)+(x-b)(x-b-3)\} \quad ,$$

商は中カッコの中である。

$$=2x^2-2(a+b+3)x+a(a+3)+b(b+3)$$
$$=2x^2-2(a+b+3)x+a^2+b^2+3(a+b) \quad .$$

虚数解は判別式が負だから

$$\frac{D}{4}=(a+b+3)^2-2\{a^2+b^2+3(a+b)\}=a^2+2ab+b^2+6(a+b)+9-2(a^2+b^2)-6(a+b)$$

$=-(a^2-2ab+b^2)+9=-(a-b)^2+9<0$

よって　$(a-b)^2-9>0$

(2)　$h(x)=x(x-3)Q(x)$　であれば

$h(0)=h(3)=0$

ところで　$f(x)=x(x-a)+s,\ f(x-3)=(x-3)(x-a-3)+s$　より、

$f(x)f(x-3)=\{s+x(x-a)\}\{s+(x-3)(x-a-3)\}$　.

同様に、

.　$g(x)g(x-3)=\{t+x(x-b)\}\{t+(x-3)(x-b-3)\}$

よって

$h(0)=f(0)f(0-3)+g(0)g(0-3)=s\{s+3(a+3)\}+t\{t+3(b+3)\}=0$　,

$h(3)=f(3)f(0)+g(3)g(0)=s\{s+3(3-a)\}+t\{t+3(3-b)\}=0$

だが、いまa = 1 , b= - 2 だから

$h(0)=s(s+12)+t(t+3)=s^2+t^2+12s+3t=0$　,

$h(3)=s(s+6)+t(t+15)=s^2+t^2+6s+15t=0$

辺々引いたり足したりすれば

$6s-12t=0 \rightarrow s-2t=0$　,

$2s^2+2t^2+18s+18t=0 \rightarrow s^2+t^2+9(s+t)=0$

上記２式を連立すれば

$s=2t,\ 5t^2+27t=0 \rightarrow t(5t+27)=0$

より　$(s,t)=(0,0),(-\frac{54}{5},-\frac{27}{5})$

【答】ア＝a 、イ＝3、ウ＝b 、エ＝3、オ＝2、カ＝2、キ＝3、ク＝3、ケ＝9、コ＝①、サ＝0、シ＝3、ス＝2、セソ＝12、タチ＝15、ツ＝2、テ＝9、トナ＝54、ニ＝5、ヌネ＝27