第 1 問

【1】 $(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=19^2-5^2\times 13=361-325=36$ であり、

$$\alpha^2+\beta^2=(19+5\sqrt{13})+(19-5\sqrt{13})=38 \ ,$$
$$\alpha\beta=\sqrt{19+5\sqrt{13}}\sqrt{19-5\sqrt{13}}\sqrt{36}=6 \ .$$

また

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=38+2\times 6=50 \ ,$$
$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=38-2\times 6=26 \ .$$

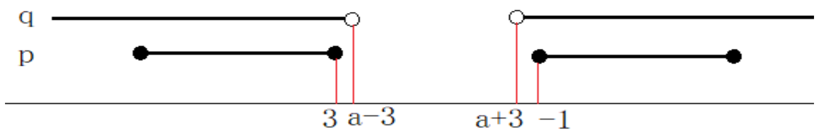
したがって

$$\alpha+\beta=5\sqrt{2},\alpha-\beta=\sqrt{26}$$

より

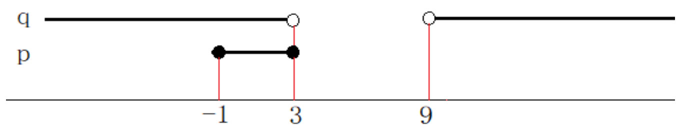
$$\alpha=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2},\beta=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{26}}{2} \ .$$

【2】(1) q は書き直すと $q:(x<a-3)\vee(a+3<x)$



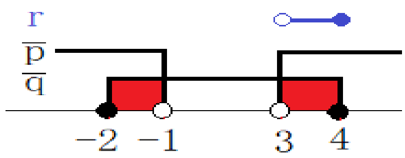
図から分かるように $(3<a-3)\vee(a+3<-1)$ だから $(a<-4)\vee(6<a)$.

(2) a=6 なら下図だが、ただ 1 点 $x=3$ のみが反例になる。



(3) $\bar{p}:x<-1,3<x$ であり、a=1 だと $\bar{q}:(1-3\leq x\leq 1+3)=(-2\leq x\leq 4)$ だから

$$\bar{p}\wedge\bar{q}:-2\leq x<-1,3<x\leq 4$$



$r:3<x\leq 4$ はこれにすっぽり含まれるから $r\Rightarrow(\bar{p}\wedge\bar{q})$. 右辺は左辺であるための必要条件である。(十分条件ではない。)

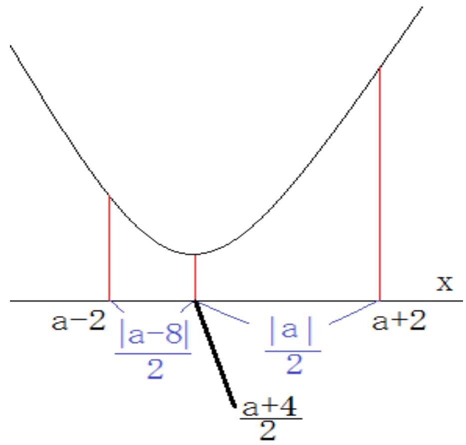
【3】(1) a と 4 の真ん中が頂点だから、頂点の x 座標は $\frac{a+4}{2}$ である。最小値は

$$f(x)=(\frac{a+4}{2}-a)(\frac{a+4}{2}-4)+4=-\frac{(a-4)^2}{4}+4=\frac{-1}{4}a^2+2a$$

(2) 頂点が問題の範囲に入るかどうかが問題になる。

$$\left|(a+2)-\frac{a+4}{2}\right|=\frac{|a|}{2}\quad ,$$
$$\left|\frac{a+4}{2}-(a-2)\right|=\frac{|a-8|}{2}$$

だが、そのグラフは右図だから、頂点から測って右端点の方が左端点より遠くにある。

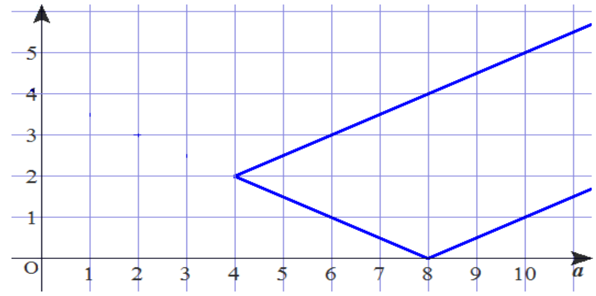


よって最大値は
$$f(a+2)=2(a+2-4)+4=2a\quad .$$

最小値は a=8 が分かれ目で、

ア) $4\le a\le 8$ のとき
$$a-2\le\frac{a+4}{2}$$
だから頂点で最小になる。

イ) $8<a$ のとき
$$\frac{a+4}{2}<a-2$$
だから左端点で最小で、最小値は
$$f(a-2)=-2(a-2-4)+4=-2a+16$$



【答】アイ＝36、ウエ＝38、オ＝6、カキ＝50、クケ＝26、コ＝5、サ＝2、シス＝26、セ＝2、ソタ＝－4、チ＝6、ツ＝3、テ＝⓪、トナ＝－1、ニ＝4、ヌ＝2、ネ＝2、ノ＝8、ハヒ＝－2、フヘ＝16

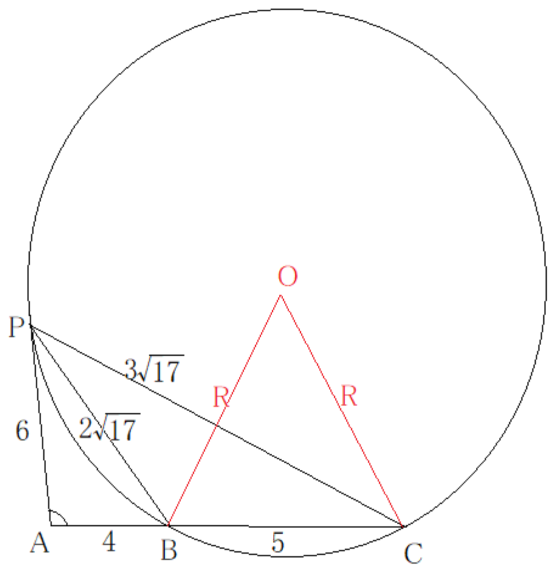
第 2 問

【1】 $\cos\angle PAB=\pm\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\pm\frac{1}{3}$

ア) $\cos\angle PAB=\frac{1}{3}$ のとき

△ABP に余弦定理を適用し
$$AB^2+36-4AB=(2\sqrt{17})^2\quad ,$$
$$AB^2-4AB-32=0\quad ,$$
$$(AB+4)(AB-8)=0\quad ,$$
$$AB=8\quad (>AP\text{ で不適})$$

イ) $\cos\angle PAB=-\frac{1}{3}$ のとき
$$AB^2+36+4AB=(2\sqrt{17})^2\quad ,$$
$$AB^2+4AB-32=0\quad ,$$
$$(AB-4)(AB+8)=0\quad ,$$
$$AB=4$$



結局　$\cos\angle PAB$　は負であると確定し、鈍角であることが分かった。
今度は△ACP に余弦定理を適用し

$$AC^2+36+4AC=(3\sqrt{17})^2 \quad ,$$
$$AC^2+4AC-117=0 \quad ,$$
$$(AC-9)(AC+13)=0 \quad ,$$
$$AC=9$$

差し引き　$BC=AC-AB=9-4=5$

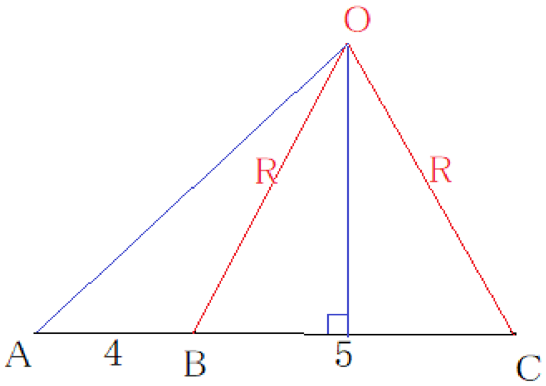
△BCP に余弦定理を適用し

$$\cos\angle BPC=\frac{(2\sqrt{17})^2+(3\sqrt{17})^2-5^2}{2\cdot(2\sqrt{17})\cdot(3\sqrt{17})}=\frac{49}{51}$$

だから　$\sin\angle BPC=\sqrt{1-(\frac{49}{51})^2}=\frac{\sqrt{(51+49)(51-49)}}{51}=\frac{10\sqrt{2}}{51}$

よって正弦定理より

$$2R=\frac{5}{\sin\angle BPC}=\frac{5\times 51}{10\sqrt{2}}\to R=\frac{51}{4\sqrt{2}}=\frac{51\sqrt{2}}{8}$$



右図のように△OBC は二等辺三角形で頂角 O から下した垂線の足を H とすれば

$$R^2=(\frac{5}{2})^2+OH^2, AO^2=(4+\frac{5}{2})^2+OH^2$$

よって

$$AO^2-R^2=(4+\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2=36$$

【2】(1) 進学率の最低クラス(階級)は 35%以上 40%未満の 1 県だから、①と②はダメ。
就職率を 5 数要約すると、 Q_1, Q_2, Q_3 のいずれもピッタリの県が存在し、 Q_1 未満 11 県、 Q_1 超 Q_2 未満 11 県、 Q_2 超 Q_3 未満 11 県、 Q_3 超 11 県となる。だから 5%以上 20%未満は少なくとも 11+1=12 県あるはず。⓪では少なすぎてダメ。よって③しか残らない。

(2)　⓪は 1998 年度を見るとダメ。
①は Yes.
②四分位範囲は箱の長さのこと。2008 年度は直前より大きくなっていて、ダメ。
③ 1978 年度を見てダメ。
④ 1973 年度は　$34\% \times 2=68\% > 66\% = max$　でダメ。
結局、正解は①

(3) 中央値は下(上)から 24 県目。それが 34.8%である。(四分位範囲は上から 12 県目－下から 12 県目だが、それは約 10%だからダメ。)
進学率の中央値は、下(上)から 24 県目の 34.5%である。

(4) 先読みして(6) のデータから計算する方法もあるのだが、ここは定性的に考えてみよう。相関係数が負だと散布図は左上から右下にかけてデータが集まる。これがばらけると r は 0 に近づく。左上の黒丸 5 個を取り除けば、傾向はばらける方向に行くので 0 に近づく。だから　$-0.41<r<0$

(5) 相関係数は $r=\dfrac{C(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ (分子は共分散、分母は標準偏差の積)だから

$$-0.41=\frac{-20}{\sigma(X)\times 7.6}\to\sigma(X)=\frac{-20}{-0.41\times 7.6}=6.41\cdots \fallingdotseq 6.4$$

本文中にあるように、分散は2乗の平均－平均の2乗に等しい、すなわち

$$\sigma(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$$

だから

$$6.4^2=1223-E(X)^2\to E(X)^2=1223-6.4^2=1182$$

【答】ア＝4、イ＝②、ウ＝9、エ＝5、オカ＝51、キ＝2、ク＝8、ケコ＝36、サ＝③、シ＝①、ス＝①、セ＝③、ソ＝②、タチ＝6．4、ツ＝②

第3問

(1) 赤赤は $\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{3}$

(2) 2色を1列に並べる順列は、同じものを含む順列だから $\dfrac{10!}{6!4!}=210$ 通り。

赤4個、白4個を1列に並べる順列は $\dfrac{8!}{4!4!}=70$ 通り。

よって、「＊＊＊＊＊＊＊＊赤赤」となる確率は $p_9=\dfrac{70}{210}=\dfrac{1}{3}$.

p_3 というのは、「＊＊赤赤＊＊＊＊＊＊」となる確率だが、これは今求めたものとまったく同じである。なぜなら10個の座席のうち指定席を2つ決めるのだが9番、10番を指定席としても3番、4番を指定席としても同じだからだ。(トランプを10人に1枚ずつ配るとして赤い札が来る確率は何番目の人でも同じだ。) よって $p_3=\dfrac{1}{3}$

(3) 4個中赤4個、赤3個、赤2個の確率を足せばよい。

$$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}\times{}_4C_1+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times{}_4C_2$$

$$=\frac{3}{42}+\frac{16}{42}+\frac{18}{42}=\frac{37}{42}$$

「4回終了時赤2個以上」(今求めたばかり)かつ「赤赤＊＊」とは

「赤赤＊＊＊＊＊＊＊＊」

のことだから、前述のとおりその確率は $\dfrac{1}{3}$ である。条件付き確率は、これを $\dfrac{37}{42}$ で割って

$$\frac{1}{3}\div\frac{37}{42}=\frac{14}{37}$$

(4)「4 回終了時赤 2 個以上」かつ「＊＊＊＊＊＊＊＊赤赤」の確率を求めるために、1～4 回と、5～8 回に分けて考える。

「1～4 回が赤 4 個で、5～8 回が赤 0 個」 $\frac{3}{42}\times(\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3})=\frac{3}{42}\times\frac{1}{15}$

「1～4 回が赤 3 個で、5～8 回が赤 1 個」 $\frac{16}{42}\times(\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times{}_4C_1)=\frac{16}{42}\times\frac{3}{15}$

「1～4 回が赤 2 個で、5～8 回が赤 2 個」 $\frac{18}{42}\times(\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times{}_4C_2)=\frac{18}{42}\times\frac{6}{15}$

この 3 つを合計して $\frac{3+48+108}{42\times15}=\frac{159}{42\times15}=\frac{53}{210}$. 条件付き確率は、これを $\frac{37}{42}$ で割って

$$\frac{53}{210}\div\frac{37}{42}=\frac{14}{37}=\frac{53}{185}$$

(5)「印をつける」を「10 本中 3 本当たりのくじを引く」と考え直す。9 回目と 10 回目とあるが、1 回目と 2 回目としても同じだ（先にトランプの例で説明した）。

「1 回目に赤玉が出る → くじを引いて当たる → 2 回目に赤玉が出る → 9 本残っているくじを引いて当たる」確率は

$$\frac{6}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{45}$$

【答】ア＝1、イ＝3、ウエオ＝210、カキ＝70、ク＝1、ケ＝3、コ＝1、サ＝3、シス＝37、セソ＝42、タチ＝14、ツテ＝37、トナ＝53、ニヌネ＝185、ノ＝1、ハヒ＝45

第 4 問

(1) 特殊解を目の子で見つける。例えば $7\times9-31\times2=1$ である。もとの方程式と辺々引いて

$$7(x-9)-31(y-2)=0$$

$7(x-9)=31(y-2)=7\times31k$ とおいて

$$x=31k+9,\ y=7k+2$$

x を最小の自然数にするには k = 0 とすればよく、 $(x,y)=(9,2)$

(2) mod.7 で考える。

$n\equiv0\Rightarrow n^2\equiv0$,

$n\equiv\pm1\Rightarrow n^2\equiv1$,

$n\equiv\pm2\Rightarrow n^2\equiv4$,

$n\equiv\pm3\Rightarrow n^2\equiv9\equiv2$,

だから、2 乗数の剰余が 2 になるのは $n\equiv\pm3\equiv3,4(mod.7)$ のときである。

(3) $y=n^2\equiv2(mod.7)$ だから前問より $n\equiv3,4(mod.7)$. よって n を初項 3 または 4 で公差 7 の等差数列

$$3,10,17,\cdots;4,11,18,\cdots$$

の項の中から小さい順に 4 つ選べばよい。それは 3, 4, 10, 11 である。それに対応して

$$y=n^2=9,16,100,121$$

(4) (1) より　$7x-1=31y \to \sqrt{31(7x-1)}=31\sqrt{y}$　. これが整数だから、y は少なくとも 2 乗数でなければならない。
また　$x \geq 1000 \to y=\dfrac{7x-1}{31} \geq \dfrac{6999}{31}=225.\cdots$　より、y は　$256=16^2$　以上の 2 乗数でなければならない。したがって　$\sqrt{y} \geq 16$
さらに　$7x-1=31y \to 6 \equiv 3y (mod.7)$　で、両辺を 3 で割る(または 5 倍して)　$y \equiv 2 (mod.7)$　.
またもや 2 乗数の剰余が 2 だから、自然数　$\sqrt{y}$　は

$$\sqrt{y} \equiv 3, 4 (mod.7)$$

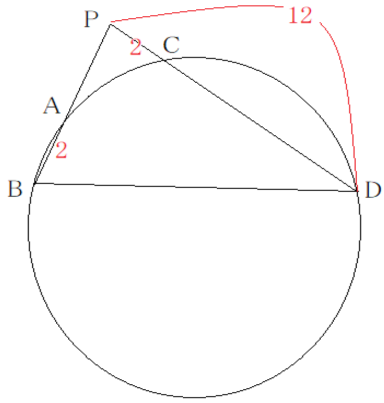
今度は　$\sqrt{y}$　を等差数列

$$17, 24, 31, \cdots ; 18, 25, 32, \cdots$$

の項の中から探す。最小なのは

$$\sqrt{y}=17,\ y=289,\ x=\frac{31y+1}{7}=1280 \quad ,$$
$$\sqrt{31(7x-1)}=31\sqrt{y}=31 \times 17=527$$

【答】ア＝9、イ＝2、ウエ＝31、オ＝7、カ＝3、キ＝4、ク＝9、ケコ＝16、サシス＝100、セソタ＝121、チツテト＝1280、ナニヌ＝527



第 5 問

方べきの定理により

$$PA(PA+2)=2 \times 12 \quad ,$$
$$PA^2+2PA-24=0 \quad ,$$
$$(PA+6)(PA-4)=0$$

より PA=4

2 円の半径を求めると

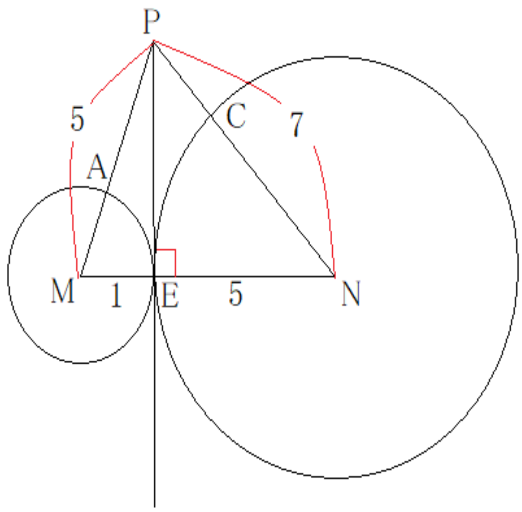
$$MA=\frac{AB}{2}=1 \quad ,$$
$$NC=\frac{PD-PC}{2}=\frac{12-2}{2}=5$$

である。円の共通接線 AE は右図のようになる。

MN=1+5=6

であり、

$$PE=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$$

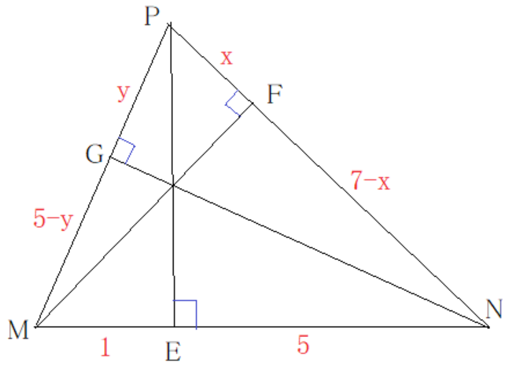


余弦定理より

$$\cos \angle MPN=\frac{5^2+7^2-6^2}{2 \times 5 \times 7}=\frac{19}{35}$$

$PF=x, PG=y$ とおく。三角形の相似から

$$x:5=y:7 \to y=\frac{7}{5}x$$



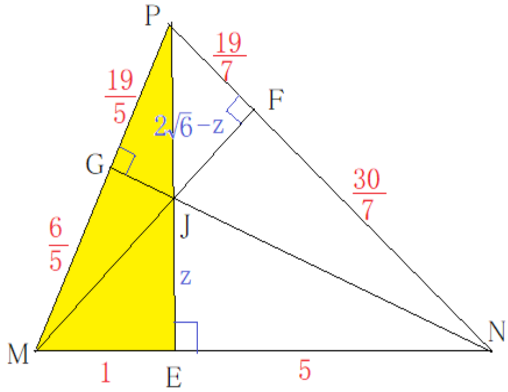
チェバの定理から

$$\frac{x}{7-x}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{5-y}{y}=1 \to 5x(5-y)=y(7-x)$$

2 式から

$$5x\left(5-\frac{7}{5}x\right)=\frac{7}{5}x(7-x) \to 5x(25-7x)=7x(7-x)$$

$$x(7x-19)=0 \to x=\frac{19}{7},\ y=\frac{19}{5}$$



メネラウスの定理により、 $JE=z$ とおけば

$$\frac{z}{2\sqrt{6}-z}\cdot\frac{19}{6}\cdot\frac{6}{5}=1 \to 19z=5(2\sqrt{6}-z)\ ,$$

$$z=\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

【答】ア＝4、イ＝6、ウ＝2、エ＝6、オカ＝19、キク＝35、ケコ＝19、サ＝7、シス＝19、セ＝5、ソ＝5、タ＝6、チツ＝12