第1問

【1】 $(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=19^2-5^2\times 13=361-325=36$ であり、

$$\alpha^2+\beta^2=(19+5\sqrt{13})+(19-5\sqrt{13})=38 \quad ,$$
$$\alpha\beta=\sqrt{19+5\sqrt{13}}\sqrt{19-5\sqrt{13}}\sqrt{36}=6 \quad .$$

また

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=38+2\times 6=50 \quad ,$$
$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=38-2\times 6=26 \quad .$$

したがって

$$\alpha+\beta=5\sqrt{2}, \alpha-\beta=\sqrt{26}$$

より

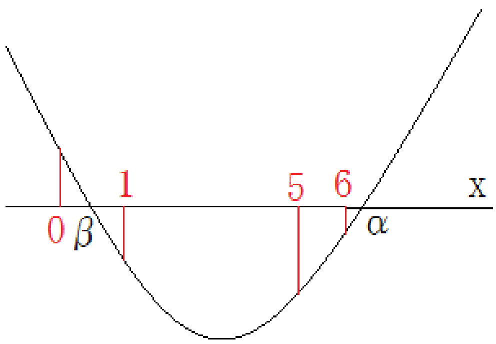
$$\alpha=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}, \beta=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{26}}{2} \quad .$$

$6=\sqrt{36}>\sqrt{26}>\sqrt{25}=5$ より $\alpha-\beta=5.\cdots$ (整数部分は5)で、最大整数は5である。

最後は不等式

$$(x-\alpha)(x-\beta)<0$$

を満たす整数の個数を求めればよい(右図)。不等式は



$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0 \quad ,$$
$$x^2-5\sqrt{2}x+6<0$$

と変形できる。左辺に代入する。

$$x=0 \Rightarrow 6>0 \quad ,$$
$$x=1 \Rightarrow 7-5\sqrt{2}=\sqrt{49}-\sqrt{50}<0$$

だから $\beta=0.\cdots$ (整数部分が0)である。

$$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta=5.\cdots+0.\cdots$$

となるから、 α は5より大きいことは確かだが繰り上がって整数部分は6になるかも知れない。(7にはなりえない。)そこで不等式の左辺への代入をさらに行って

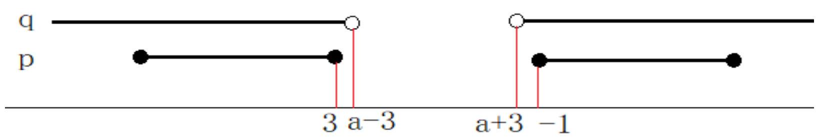
$$x=6 \Rightarrow 42-30\sqrt{2}=6(7-5\sqrt{2})=6(\sqrt{49}-\sqrt{50})<0$$

やはり繰り上がって

$$\alpha=6.\cdots \quad (\text{整数部分が}6)$$

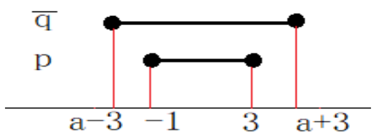
であった。よって α, β の間には1, 2, 3, 4, 5, 6の6個の整数が存在する。

【2】(1) q は書き直すと $q:(x<a-3)\vee(a+3<x)$

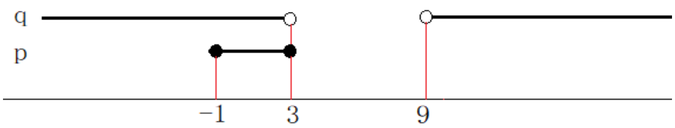


図から分かるように $(3<a-3)\vee(a+3<-1)$ だから $(a<-4)\vee(6<a)$.

$p\Rightarrow\overline{q}$ は右図より $(a-3\leq -1)\wedge(3\leq a+3)$ だから $0\leq a\leq 2$.

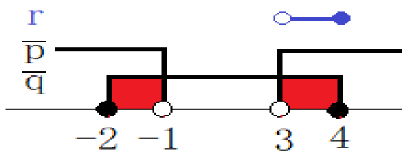


(2) a=6 なら下図だが、ただ 1 点　$x=3$　のみが反例になる。



(3)　$\bar{p}:x<-1,3<x$　であり、a=1 だと　$\bar{q}:(1-3\leq x\leq 1+3)=(-2\leq x\leq 4)$　だから

$\bar{p}\wedge\bar{q}:-2\leq x<-1,3<x\leq 4$



$r:3<x\leq 4$　はこれにすっぽり含まれるから　$r\Rightarrow(\bar{p}\wedge\bar{q})$　. 右辺は左辺であるための必要条件である。（十分条件ではない。）

【答】アイ＝36、ウエ＝38、オ＝6、カキ＝50、クケ＝26、コ＝5、サ＝2、シス＝26、セ＝2、ソ＝5、タ＝6、チツ＝－4、テ＝6、ト＝0、ナ＝2、ニ＝3、ヌ＝⓪

第 2 問

(1) a と 4 の真ん中が頂点だから、頂点の x 座標は　$\frac{a+4}{2}$　であり、

$$f(x)=(\frac{a+4}{2}-a)(\frac{a+4}{2}-4)+4=-\frac{(a-4)^2}{4}+4=-\frac{1}{4}a^2+2a$$

であるから頂点は　$(\frac{1}{2}a+2,\frac{-1}{4}a^2+2a)$　である。

(2) 頂点の y 座標が 0 以下になればよいから　$\frac{-1}{4}a^2+2a\leq 0$　,

$$a^2-8a\geq 0\rightarrow a(a-8)\geq 0\rightarrow a\leq 0,8\leq a$$

y 切片は

$$k=f(0)=4a+4\geq 4\times 8+4=36$$

(3) 最小値は頂点の y 座標だから

$$\frac{-1}{4}a^2+2a=-12\rightarrow a^2-8a-48=0\rightarrow(a+4)(a-12)=0\rightarrow a=-4,12$$

だが　$a\geq 8$　だったから　$a=12$

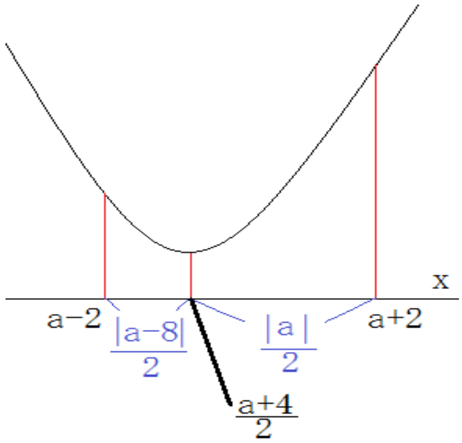
x 切片は　$f(x)=(x-12)(x-4)+4=x^2-16x+52=0$　より

$$x=8\pm\sqrt{64-52}=8\pm 2\sqrt{3}$$

(4) 頂点が問題の範囲に入るかどうかが問題になる。

$$\left|(a+2)-\frac{a+4}{2}\right|=\frac{|a|}{2}\quad ,$$
$$\left|\frac{a+4}{2}-(a-2)\right|=\frac{|a-8|}{2}$$

だが、そのグラフは右図だから、頂点から測って右端点の方が左端点より遠くにある。



よって最大値は

$$f(a+2)=2(a+2-4)+4=2a\quad .$$

最小値は a=8 が分かれ目で、

ア) $4\leq a\leq 8$　のとき

$$a-2\leq\frac{a+4}{2}$$

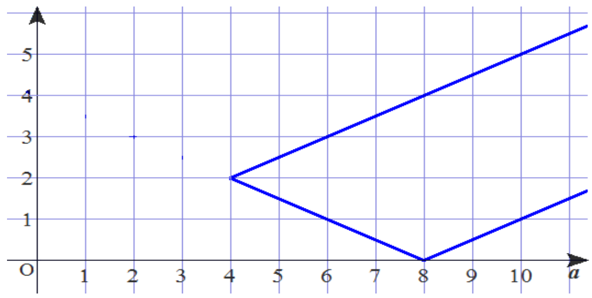
だから頂点で最小になる。

イ) $8<a$　のとき

$$\frac{a+4}{2}<a-2$$

だから左端点で最小で、最小値は

$$f(a-2)=-2(a-2-4)+4=-2a+16$$

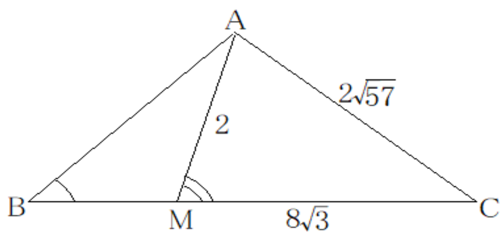


【答】ア＝1、イ＝2、ウ＝2、エオ＝－1、カ＝4、キ＝2、ク＝0、ケ＝8、コサ＝36、シス＝12、セ＝8、ソ＝2、タ＝3、チ＝2、ツ＝8、テト＝－2、ナニ＝16

第 3 問

(1) 余弦定理より

$$\cos\angle AMC=\frac{2^2+(8\sqrt{3})^2-(2\sqrt{57})^2}{2\cdot 2\cdot 8\sqrt{3}}=\frac{-32}{32\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$



BC を底辺と見たときの三角形の高さを h とすれば

$$h=AB\sin\angle ABC=2\sin\angle AMC=2\sin\angle AMB\quad ,$$
$$AB=2\frac{\sin\angle AMB}{\sin\angle ABC}=2\times 3=6$$

BM は cos を使う。

$$BM=AB\cos\angle ABC-AM\cos\angle AMC=6\cos\angle ABC-2\times(-\frac{\sqrt{3}}{3})$$

だが、

$$\cos\angle ABC=\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}$$

であって

$$\sin\angle ABC=\frac{1}{3}\sin\angle AMB=\frac{1}{3}\sqrt{1-\cos^2\angle AMB}=\frac{1}{3}\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{6}}{9}\quad ,$$

$$\cos\angle ABC=\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{6}}{9})^2}=\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

だから

$$BM=6\times\frac{5}{3\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\quad ,$$

$$BC=BM+CM=4\sqrt{3}+8\sqrt{3}=12\sqrt{3}\quad .$$

三角形の面積は

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{9}=12\sqrt{2}$$

(2) 4 面について 3 辺の 2 乗を計算してみよう。

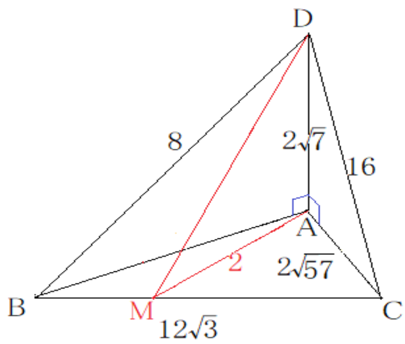
$\triangle ABC:36, 228, 432$,

$\triangle ABD:28, 36, 64$,

$\triangle BCD:64, 256, 432$,

$\triangle ACD:28, 228, 256$

だから、この中で三平方が成り立つのは $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ である。ということは線分 AD は平面 ABC に垂直である。すなわち $\angle DAM=90^\circ$



よって、DM は三平方により

$$DM=\sqrt{AM^2+AD^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{7})^2}=4\sqrt{2}\quad .$$

余弦定理により

$$\cos\angle CDM=\frac{CD^2+DM^2-M^2}{2CD\cdot DM}=\frac{256+32-(8\sqrt{3})^2}{2\cdot 16\cdot 4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}\quad ,$$

$$\tan^2\angle CDM=\frac{1}{\cos^2\angle CDM}-1=\frac{23}{9}\to\tan\angle CDM=\frac{\sqrt{23}}{3}$$

である。 $1=\frac{\sqrt{9}}{3}<\frac{\sqrt{23}}{3}<\frac{\sqrt{27}}{3}=\sqrt{3}$ より $45^\circ<\angle CDM<60^\circ$

【答】ア＝3、イ＝3、ウ＝6、エ＝4、オ＝3、カキ＝12、ク＝3、ケコ＝12、サ＝2、シ＝①、ス＝②、セソ＝90、タ＝4、チ＝2、ツテ＝23、ト＝3、ナ＝②

第 4 問

(1) 進学率の最低クラス(階級)は 35%以上 40%未満の 1 県だから、①と②はダメ。
就職率を 5 数要約すると、 Q_1, Q_2, Q_3 のいずれもピッタリの県が存在し、 Q_1 未満 11 県、 Q_1 超 Q_2 未満 11 県、 Q_2 超 Q_3 未満 11 県、 Q_3 超 11 県となる。だから 5%以上 20%未満は少なくとも 11+1=12 県あるはず。⓪では少なすぎてダメ。よって③しか残らない。

(2)　⓪は 1998 年度を見るとダメ。
①は Yes.
②四分位範囲は箱の長さのこと。2008 年度は直前より大きくなっていて、ダメ。
③ 1978 年度を見てダメ。
④ 1973 年度は　$34\% \times 2 = 68\% > 66\% = max$　でダメ。
結局、正解は①

(3) 1998 年度だけ最小値が 10%以上 15%未満だから、②しかありえない。
2003 年度だけ下位 2 クラス(階級)＝5%以上 15%未満にちょうど 11 県含まれる。そうなっているのは④しかない。

(4) 中央値は下(上)から 24 県目。それが 34.8%である。(四分位範囲は上から 12 県目－下から 12 県目だが、それは約 10%だからダメ。)
進学率の中央値は、下(上)から 24 県目の 34.5%である。

(5) 先読みして(6) のデータから計算する方法もあるのだが、ここは定性的に考えてみよう。相関係数が負だと散布図は左上から右下にかけてデータが集まる。これがばらけると r は 0 に近づく。左上の黒丸 5 個を取り除けば、傾向はばらける方向に行くので 0 に近づく。だから　$-0.41 < r < 0$

(6) 相関係数は　$r = \dfrac{C(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$　(分子は共分散、分母は標準偏差の積)だから

$$-0.41 = \frac{-20}{\sigma(X) \times 7.6} \to \sigma(X) = \frac{-20}{-0.41 \times 7.6} = 6.41 \cdots \fallingdotseq 6.4$$

本文中にあるように、分散は 2 乗の平均－平均の 2 乗に等しい、すなわち

$$\sigma(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

だから

$$6.4^2 = 1223 - E(X)^2 \to E(X)^2 = 1223 - 6.4^2 = 1182$$

【答】ア＝③、イ＝①、ウ＝②、エ＝④、オ＝①、カ＝③、キ＝②、クケ＝6．4、コ＝②