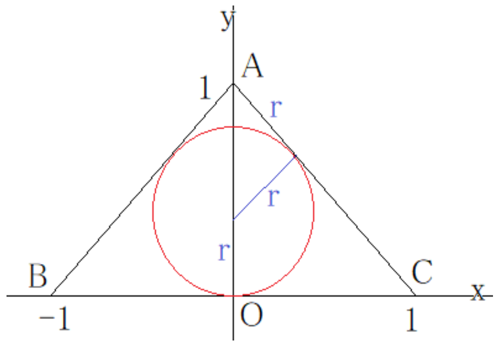
【第 1 問】(1) 右図のように $r - r - \sqrt{2}r$ の直角二等辺三角形ができる。よって



$$r+\sqrt{2}r=1 \to r=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1 \quad (答)$$

(2) 円と直線の式を連立する。代入して

$$x^2+(ax-1)^2=1 \to (1+a^2)x^2-2ax=0 \to x=0, \frac{2a}{1+a^2}$$

D と異なる点 E は $\left(\frac{2a}{1+a^2}, a\times\frac{2a}{1+a^2}-1\right)=\left(\frac{2a}{1+a^2}, \frac{a^2-1}{1+a^2}\right)$ (答)

(3) 円 T: $x^2+(y-\sqrt{2}+1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$ と直線の式の連立から

$$x^2+(ax-\sqrt{2})^2=(\sqrt{2}-1)^2 \to (1+a^2)x^2-2\sqrt{2}ax+2\sqrt{2}-1=0$$

接するから判別式＝0 で

$$\frac{D}{4}=2a^2-(1+a^2)(2\sqrt{2}-1)=0 \to a^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}=5+4\sqrt{2}$$

点 E の y 座標は(2) の答より

$$y=\frac{a^2-1}{1+a^2}=\frac{4+4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}=2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}-1)$$

円 T の頂上の点の座標は $(0,2r)=(0,2(\sqrt{2}-1))$ だから、2 つの点の y 座標が等しく、2 点を結ぶ直線は x 軸に平行で円 T に接する。■

【第２問】(1) 円周角が直角だから、直径を見込む円周角だ。
点 A $(\cos\theta, \sin\theta)$ の対蹠点を A' とすれば

$$A'(-\cos\theta, -\sin\theta)$$

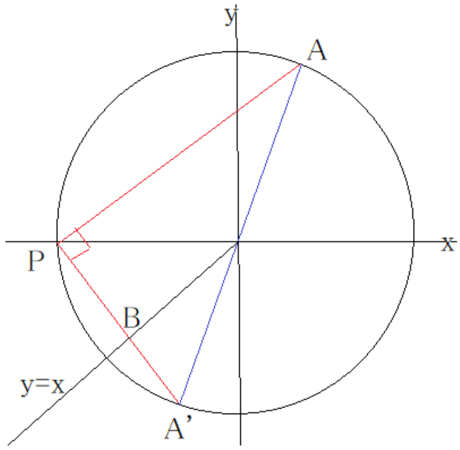
直線　A'P の方程式は

$$y=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta+1}(x+1)$$

これと直線　$y=x$　との交点 B の x 座標は

$$x=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta+1}(x+1)\to(1-\cos\theta+\sin\theta)x=-\sin\theta \quad ,$$

$$x=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta} \quad \text{(答)}$$



(2) AB の中点の x 座標は $\frac{1}{2}(\cos\theta+\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta})=\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-\sin\theta}{2(1-\cos\theta+\sin\theta)}$

ここで分母の括弧は

$$1-\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})+1\geq 1-\frac{1}{\sqrt{2}}>0 \quad ,$$

分子は

$$\cos\theta-\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-\sin\theta=\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$=\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta(1-\cos\theta)=(1-\cos\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$$

で　$1-\cos\theta\geq 0$　だから　$\theta=0$　は条件を満たす。

$\theta\neq 0$　のときは　$\cos\theta-\sin\theta\geq 0$　でなければならない。

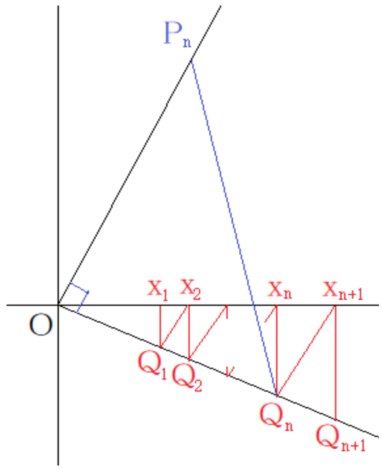
$$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\geq 0\to 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4} \quad \text{(答)}$$

【第 3 問】(1)　$Q_n=\left(x_n, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ を通って l に平行な直線は $y+\frac{1}{\sqrt{3}}x_n=\sqrt{3}(x-x_n)$

これと x 軸との交点の x 座標は $\sqrt{3}(x-x_n)=\frac{1}{\sqrt{3}}x_n \to x=\frac{4}{3}x_n$

よって $Q_{n+1}=\left(x_{n+1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n+1}\right)=\frac{4}{3}\left(x_n, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$. 数列 $\{x_n\}$ は等比数列で、

$$x_n=x_1\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \text{(答)}$$



(2) 2 直線 l, m は垂直だから

$$a_n=\triangle OP_nQ_n=\frac{1}{2}OP_n\cdot OQ_n$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+(\sqrt{3}n)^2}\sqrt{\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right\}^2+\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right\}^2}$$
$$=\frac{1}{2}n\sqrt{1+3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}n\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

(3) 掛けてずらして引けばよい。

$$S_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{1+2\cdot\frac{4}{3}+3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right\} ,$$
$$\frac{4}{3}S_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\frac{4}{3}+2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}$$

辺々引いて

$$-\frac{1}{3}S_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{1+\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\left\{\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}{\frac{4}{3}-1}-n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\left\{3\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n-1\right)-n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}=2\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n-2\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

よって

$$S_n=-6\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n+6\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n \quad \text{(答)}$$

【第 4 問】(1) $I_1=\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}$ (答)

$I_2=\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cos 2\theta\, d\theta=\int_0^{\pi/4}\sin\theta(2\cos^2\theta-1)\,d\theta=\left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\cos\theta\right]_0^{\pi/4}$

$=-\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-1\right\}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ (答)

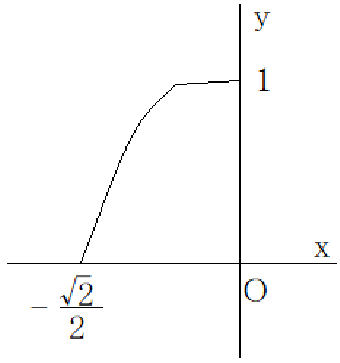
$I_3=\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\cos 2\theta\, d\theta=\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta(2\cos^2\theta-1)\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2}\sin^2 2\theta-\sin^2\theta\right)d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{4}-\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\left[-\frac{1}{4}\theta-\frac{1}{16}\sin 4\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}$ (答)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}=\frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}$ (答)

分母>0, 分子≧0 で 0 になるのは π/4 のとき。
グラフは右図の通りだが、接線の傾きは点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ で 2, 点 (0,1) で 0 に注意。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dy}{dx}$	2	+	0
x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	0
y	0	↗	1



(3) $V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^{\pi/4} x^2\frac{dy}{d\theta}d\theta=\pi\int_0^{\pi/4}\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 2\cos 2\theta\, d\theta$

$=\pi\left\{2\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\cos 2\theta\, d\theta-2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cos 2\theta\, d\theta+\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta\right\}$

$=\pi\left\{2\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}\right)-2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{2}\right\}=\pi\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3}-\frac{\pi}{8}\right)$ (答)

【第５問】(1)　$a_2=\dfrac{1}{2-a_1}=1/(2-\dfrac{c}{1+c})=\dfrac{1+c}{2+c}$　(答)

$a_3=\dfrac{1}{2-a_2}=1/(2-\dfrac{1+c}{2+c})=\dfrac{2+c}{3+c}$　(答)

(2) 前問から　$a_n=\dfrac{n-1+c}{n+c}$　と予想される。それが正しいことを数学的帰納法で証明する。

n=1 はよい。n のとき成り立つとして

$$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}=1/(2-\frac{n-1+c}{n+c})=\frac{n+c}{n+1+c}\quad\blacksquare$$

(3)　$$\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=\frac{n+c}{n+1+c}\cdot\frac{n+c}{n-1+c}-1=\frac{(n+c)^2}{(n+1+c)(n-1+c)}-1=\frac{(n+c)^2-\{(n+c)^2-1\}}{(n+1+c)(n-1+c)}$$

$$=\frac{1}{(n+1+c)(n-1+c)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+1+c})$$

和は

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+1+c})$$

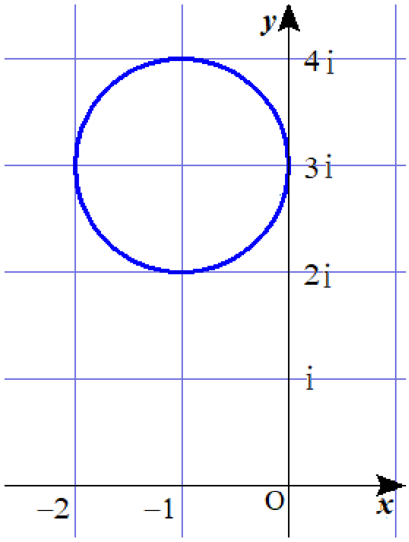
$$=\frac{1}{2}\{(\frac{1}{c}-\frac{1}{2+c})+(\frac{1}{1+c}-\frac{1}{3+c})+\cdots+(\frac{1}{n-2+c}-\frac{1}{n+c})+(\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+1+c})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c}-\frac{1}{n+c}-\frac{1}{n+1+c})\to\frac{1}{2}(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c})=\frac{1+2c}{2c(1+c)}\quad\text{(答)}$$

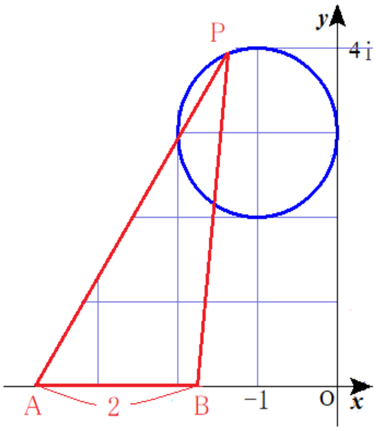
【第 6 問】(1)　$(z+1-3i)(\bar{z}+1+3i)-10+9=0$

$$|z+1-3i|^2=1 \to |z-(-1+3i)|=1$$

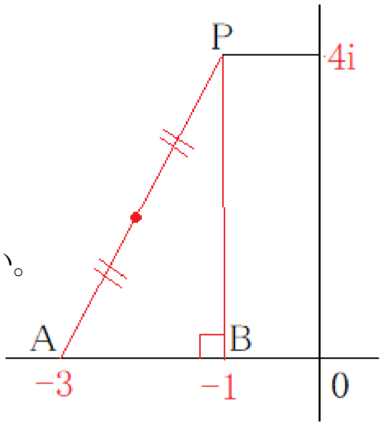
$-1+3i$　を中心とし、半径が 1 の円である。



(2)　$w=x+yi$　とおけば　$\alpha=2x-1, \beta=2x+1$　は実数であって実軸上にある。底辺は　$AB=(2x+1)-(2x-1)=2$　で確定するから、高さをできるだけ高くすればよい。



そのためには点 P は円の頂上、すなわち　$w=-1+4i$　になればよい。そのとき　$x=-1, \alpha=-3, \beta=-1$　だから、三角形は右図のように直角三角形になる。よって外接円の中心は斜辺の中心で



$$\frac{-3+(-1+4i)}{2}=-2+2i \quad (\text{答})$$

であり、半径は

$$\sqrt{(-3+2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5} \quad (\text{答})$$