〔I〕 平面上の△ABCにおいて，辺ABを1：2に内分する点をD，辺BCを3：2に内分する点をEとし，線分AEとCDの交点をOとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$を$\vec{p}$，$\vec{q}$を用いて表せ。

(2) 点Oが△ABCの外接円の中心となるとき，3辺AB，BC，CAの長さの2乗の比を求めよ。

〔Ⅱ〕 微分可能なxの関数$f(x)$が任意の実数x，yに対して次の関係を満たすとき，以下の問いに答えよ。

$$f(-x)=-f(x)$$
$$\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=1$$
$$f'(x+y)=f'(x)f'(y)-f(x)f(y)$$
$$f'(0)=1$$

(1) $f(0)$を求めよ。

(2) $f'(x)$は偶関数であることを証明せよ。

(3) $f'(u)-f'(v)=-2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right)$を証明せよ。

(4) $f'(x)$が微分可能であることを示し，$f''(x)=-f(x)$を証明せよ。

〔III〕 正の実数 a に対して，半円 $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ $(x \geqq 0)$ がある。この半円に外接しかつ x 軸に接する円の中心を $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) この半円と曲線 $y = f(x)$，直線 $x = a$ とに囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(3) この半円と曲線 $y = f(x)$，直線 $x = a$ とに囲まれる図形が，x 軸の周りに一回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の条件で定められる数列を$\{a_n\}$とする。

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \log(a_n + 2)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 方程式$\log(x+2) = x$が2個の実数解b, c $(b < c)$を持つことを示し，$m \leqq b < m+1$, $n \leqq c < n+1$を満たす整数m, nを求めよ。ただし，自然対数の底eについて，$\dfrac{5}{2} < e < 3$が成り立つことを用いてよい。

(2) 実数s, tが$-2 < s < t$を満たすとき，$\dfrac{\log(t+2) - \log(s+2)}{t-s}$と$\dfrac{1}{s+2}$の大小関係を調べよ。

(3) cは(1)で定義した数とする。$\left|\dfrac{a_{n+1} - c}{a_n - c}\right|$と$\dfrac{1}{2}$の大小関係を調べよ。

(4) cは(1)で定義した数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c$であることを示せ。