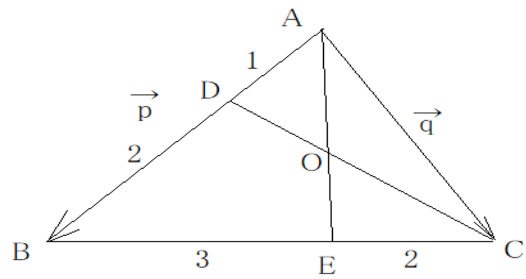
【I】(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\vec{p}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{2\vec{p}+3\vec{q}}{5}$ も使って $\overrightarrow{AO}$ を二様に表すと



$$\overrightarrow{AO}=s\cdot\frac{1}{3}\vec{p}+(1-s)\vec{q}=t\cdot\frac{2\vec{p}+3\vec{q}}{5}\quad ,$$

$$\left(\frac{s}{3}-\frac{2}{5}t\right)\vec{p}+\left(1-s-\frac{3}{5}t\right)\vec{q}=\vec{0}\quad .$$

$\vec{p},\vec{q}$ の1次独立性により、左辺が零ベクトルになるのは次の場合に限る。

$$\frac{s}{3}-\frac{2}{5}t=0, 1-s-\frac{3}{5}t=0\quad .$$

よって $s=\frac{2}{3}, t=\frac{5}{9}$ だから $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{9}\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{q}$ (答)

(2) O が外心だから $|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{BO}|^2=|\overrightarrow{CO}|^2$ となる。

$$|\overrightarrow{AO}|^2=\left|\frac{2}{9}\vec{p}+\frac{3}{9}\vec{q}\right|^2=\frac{1}{81}(4|\vec{p}|^2+12\vec{p}\cdot\vec{q}+9|\vec{q}|^2)\quad ,$$

$$|\overrightarrow{BO}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}|^2=\left|-\frac{7}{9}\vec{p}+\frac{3}{9}\vec{q}\right|^2=\frac{1}{81}(49|\vec{p}|^2-42\vec{p}\cdot\vec{q}+9|\vec{q}|^2)\quad ,$$

$$|\overrightarrow{CO}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC}|^2=\left|\frac{2}{9}\vec{p}-\frac{6}{9}\vec{q}\right|^2=\frac{1}{81}(4|\vec{p}|^2-24\vec{p}\cdot\vec{q}+36|\vec{q}|^2)$$

となるから $x=|\vec{p}|^2, y=\vec{p}\cdot\vec{q}, z=|\vec{q}|^2$ とおけば

$$4x+12y+9z=49x-42y+9z=4x-24y+36z$$

だが、この連立方程式を y を定数と思って解くと $x=\frac{6}{5}y, z=\frac{4}{3}y$.

ところで BC の 2 乗は

$$|\vec{p}-\vec{q}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=x-2y+z=\frac{8}{15}y$$

だから $AB^2:BC^2:CA^2=x:\frac{8}{15}y:z=\frac{6}{5}y:\frac{8}{15}y:\frac{4}{3}y=9:4:10$ (答)

【**II**】(1) 第 1 式に $x=0$ を代入して $f(0)=-f(0) \Rightarrow 2f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$ (答)

(2) 第 1 式の両辺を微分すると合成関数の微分法により

$$-f'(-x)=-f'(x) \Rightarrow f'(-x)=f'(x) \quad ■$$

(3) 第 3 式から

$$f'(u)=f'\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\right)=f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(\frac{u-v}{2}\right)-f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right) ,$$

$$f'(v)=f'\left(\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\right)=f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(-\frac{u-v}{2}\right)-f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(-\frac{u-v}{2}\right)$$

だが f, f' がそれぞれ奇・偶関数だから、最後の式は

$$f'(v)=f'\left(\frac{u+v}{2}\right)f'\left(\frac{u-v}{2}\right)+f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right) .$$

先の式と辺々引けば

$$f'(u)-f'(v)=-2f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right) \quad ■$$

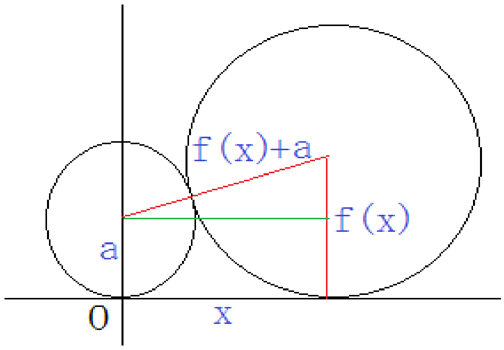
(4) $f''(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ だが、(3) より

$$f''(x)=\lim\left\{-2f\left(x+\frac{h}{2}\right)f\left(\frac{h}{2}\right)/h\right\}=-2\lim f\left(x+\frac{h}{2}\right)\left\{f\left(\frac{h}{2}\right)-f(0)\right\}/h$$

$$=-\lim f\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\lim\frac{f\left(\frac{h}{2}\right)-f(0)}{\frac{h}{2}}=-f(x)\times f'(0)=-f(x) \quad ■$$

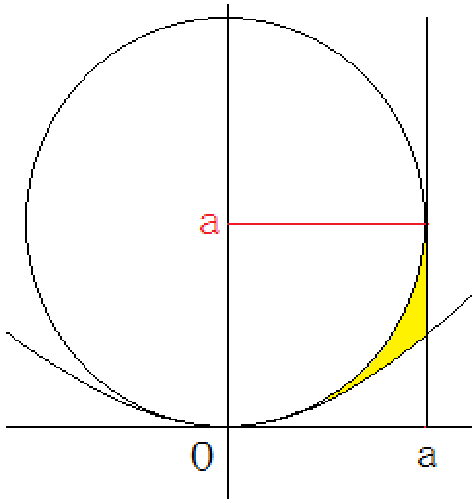
【III】 (1) 右図から分かるように

$$(f(x)+a)^2=(f(x)-a)^2+x^2 \ ,$$
$$2a\,f(x)=-2a\,f(x)+x^2 \ ,$$
$$f(x)=\frac{x^2}{4a} \quad \text{(答)}$$



(2) 放物線は外接円の中心の軌跡であったから、半円とは原点以外の共有点を持たない。面積 S は 1 辺 a の正方形から、四分円と放物線下の面積を引けば求まる。
よって

$$S=a^2-\frac{\pi}{4}a^2-\int_0^a \frac{x^2}{4a}dx$$
$$=a^2-\frac{\pi}{4}a^2-\left[\frac{x^3}{12a}\right]_0^a=\frac{11}{12}a^2-\frac{\pi}{4}a^2 \quad \text{(答)}$$



(3) 中空型の立体だから、外体積から内体積を引けばよい。
外体積は円の式　$y=a-\sqrt{a^2-x^2}$　より

$$V_1=\pi\int_0^a (a-\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^a \{a^2-2a\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2\}\,dx$$
$$=2\pi a^3-2\pi a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx-\pi\int_0^a x^2\,dx$$

だが第 2 項の定積分は四分円の面積で　$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2$　だから

$$V_1=2\pi a^3-\frac{\pi^2}{2}a^3-\frac{\pi}{3}a^3=\frac{5}{3}\pi a^3-\frac{\pi^2}{2}a^3 \ .$$

一方、内体積は

$$V_2=\pi\int_0^a \left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 dx=\pi\left[\frac{x^5}{80a^2}\right]_0^a=\frac{\pi}{80}a^3 \ .$$

よって

$$V=V_1-V_2=\frac{5}{3}\pi a^3-\frac{\pi^2}{2}a^3-\frac{\pi}{80}a^3=\frac{397}{240}\pi a^3-\frac{\pi^2}{2}a^3 \quad \text{(答)}$$

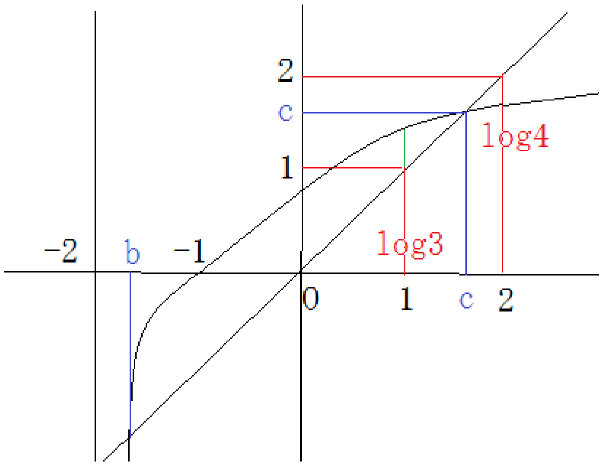
【IV】(1)　$f(x)=x-\log(x+2)$　とおけば

$$f(-2)=\infty \quad ,$$
$$f(-1)=-1 \quad ,$$
$$f'(x)=1-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}$$

だから　$x=-1$　を境にして減少から増加に変わる。よって、実数解は　$-2<x<-1$　に1つと、もう一つあるとしたら　$-1<x$　においてである。これで　$-2\le b<-1 \Rightarrow m=-2$　は分かった。

もう一つの方は

$$\log(0+2)=\log 2>\log 1=0 \quad ,$$
$$\log(1+2)=\log 3>\log e=1 \quad ,$$
$$\log(2+2)=\log 4=2\log 2<2\log e=2$$



より　$x=1\sim 2$　において　$\log(x+2)=x$　になることが分かる。よって　$1\le c<2 \Rightarrow n=1$

(答)　$m=-2, n=1$

(2)　$(\log(x+2))'=\dfrac{1}{x+2}$　だから、平均値の定理により

$$\frac{\log(t+2)-\log(s+2)}{t-s}=\frac{1}{\xi+2}, s<\xi<t$$

なる実数　ξ　が存在する。　$y=\dfrac{1}{x+2}, x>-2$　は単調減少だから　$\dfrac{1}{s+2}>\dfrac{1}{\xi+2}>\dfrac{1}{t+2}$　. よって

$$\frac{\log(t+2)-\log(s+2)}{t-s}<\frac{1}{s+2} \quad (答)$$

(3) 初項は　$a_1=0<c$　だから　$a_n<c$　と仮定しよう。(2)より

$$\frac{\log(c+2)-\log(a_n+2)}{c-a_n}<\frac{1}{a_n+2} \quad ,$$
$$\frac{c-a_{n+1}}{c-a_n}<\frac{1}{a_n+2} \quad .$$

$\log(x+2)$　の導関数は常に正だから、左辺(平均変化率)も正、したがって分母・分子は同符号である。帰納法により任意のnについて　$a_n<c$　. また　$a_n\ge 0$　なら　$a_{n+1}=\log(a_n+2)\ge\log 2\ge 0$　だから、帰納法により任意のnについて　$a_n\ge 0$　. したがって

$$\frac{1}{a_n+2}\le\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2} \quad .$$

結局

$$\left|\frac{c-a_{n+1}}{c-a_n}\right|<\frac{1}{2} \quad (答)$$

(3) 右図より一目瞭然だが、前問の結果を使うと

$$|c-a_n|<\frac{1}{2}|c-a_{n-1}|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|c-a_{n-2}|<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|c-a_1| \quad .$$

$n\to\infty$　とすれば　$\lim|c-a_n|=0$　だから

$\lim a_n=c$　■