【1】[1] 直線 OC とは y 軸だから、球面の方程式は $x^2+(y-y_0)^2+z^2=r^2$ とおける。これが 2 点 $(x,y,z)=(1,5,-1),(3,4,2)$ を通ることから、次の連立方程式を解く。

$$(y_0-5)^2+2=r^2,(y_0-4)^2+13=r^2$$

辺々引いて $2y_0+2=0, y_0=-1, r^2=38$ . よって $x^2+(y+1)^2+z^2=38$ (答)

[2] 3 辺の長さは

$$AB=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}, BC=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}, CA=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

で

$$\cos\angle ABC=\frac{14+17-3}{2\sqrt{14}\sqrt{17}}=\sqrt{\frac{14}{17}}, \sin\angle ABC=\sqrt{\frac{3}{17}}$$

だから $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{14}\sqrt{17}\sqrt{\frac{3}{17}}=\frac{\sqrt{42}}{2}$ (答)

[3] 平面 $\alpha$ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}=(2,-1,3), \overrightarrow{AC}=(-1,1,1)$ に垂直だから、法線ベクトルを $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$ とおけば $2n_1-n_2+3n_3=0, -n_1+n_2+n_3=0$ より

$$\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)=(-4c_3,-5n_3,n_3)$$

となる。ここで、単位ベクトルを採用して法線ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{42}}(4,5,-1)$ としてよい。

平面の方程式は

$$4(x-1)+5(y-5)-(z+1)=0$$

で、直線 OH は

$$(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{42}}(4,5,-1)t$$

平面の式に代入して $4(\frac{4t}{\sqrt{42}}-1)+5(\frac{5t}{\sqrt{42}}-5)-(\frac{-t}{\sqrt{42}}+1)=0\rightarrow\sqrt{42}t=30\rightarrow t=\frac{30}{\sqrt{42}}$ となるが、この t の値は点 O から平面 $\alpha$ に下した垂線の長さである。垂線の足は

$$H=\frac{1}{\sqrt{42}}(4,5,-1)\frac{30}{\sqrt{42}}=\frac{5}{7}(4,5,-1)=(\frac{20}{7},\frac{25}{7},-\frac{5}{7})$$ (答)

[4] 2 直線 AH, BC の方程式はそれぞれ

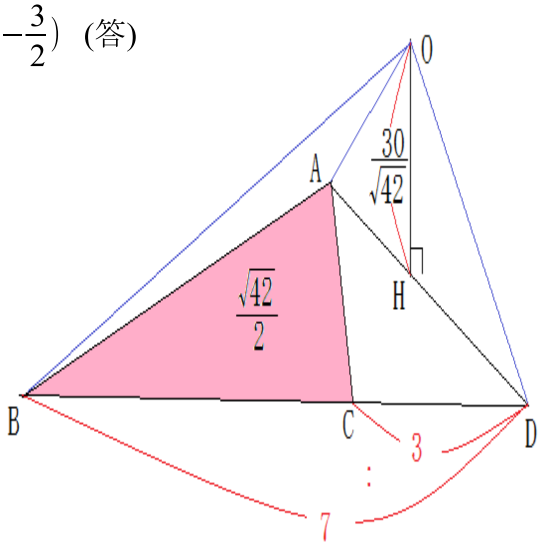
$$(x,y,z)=(1,5,-1)+t(\frac{13}{7},-\frac{10}{7},\frac{2}{7}),(x,y,z)=(3,4,2)+s(-3,2,-2)$$

だから連立して $t=-\frac{7}{4}, s=\frac{7}{4}, D=(x,y,z)=(-\frac{9}{4},\frac{15}{2},-\frac{3}{2})$ (答)

[5] 点 D は線分 BC を外分しているが、その外分比は x 座標だけ見て $(3+\frac{9}{4}):\frac{9}{4}=7:3$ と分かる。

△ABD の面積は△ABC の $\frac{7}{4}$ 倍である。体積は

$$V=\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{42}}{2}\times\frac{7}{4})\frac{30}{\sqrt{42}}=\frac{35}{4}$$ (答)



【2】[1] $\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{n-1}=(\frac{1}{2})^2\cdot\frac{a_{n-2}}{n-2}=\cdots=(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot\frac{a_1}{1}=(\frac{1}{2})^{n-1}$ より $a_n=n(\frac{1}{2})^{n-1}$ (答)

[2] $c_{n+1}=\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=(\frac{n+1}{2n}b_n+\frac{1}{2^n n})\div(\frac{(n+1)a_n}{2n})=c_n+\frac{1}{(n+1)2^{n-1}a_n}=c_n+\frac{1}{n(n+1)}$ ,

$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

これを 1 , 2 , 3 , …, n-1 に亘って辺々足せば

$c_n-c_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\to c_n=2-\frac{1}{n}$ (答)

[3] $b_n=a_n c_n=n(\frac{1}{2})^{n-1}(2-\frac{1}{n})=(\frac{1}{2})^{n-1}(2n-1)$ (答)

[4]「掛けてズラして引く」が基本。

$S_n=1+(\frac{1}{2})\cdot3+(\frac{1}{2})^2\cdot5+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot(2n-1)$ ,

$\frac{1}{2}\cdot S_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2\cdot3+(\frac{1}{2})^3\cdot5+\cdots+(\frac{1}{2})^n\cdot(2n-1)$

より

$\frac{1}{2}\cdot S_n=S_n-\frac{1}{2}\cdot S_n=1+(\frac{1}{2})\cdot2+(\frac{1}{2})^2\cdot2+(\frac{1}{2})^3\cdot2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot2-(\frac{1}{2})^n\cdot(2n-1)$

$=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(\frac{1}{2})^n\cdot(2n-1)=1+2\{1-(\frac{1}{2})^{n-1}\}-(\frac{1}{2})^n\cdot(2n-1)$

$=3-(\frac{1}{2})^n(2n+3)$

よって $S_n=6-(\frac{1}{2})^{n-1}(2n+3)$ (答)

【3】[1] 点 P における2曲線の接線の傾きはそれぞれ

$$C_1 : y'(a) = 2\sin 2a \quad ,$$

$$C_2 : -1 \div \frac{-\cos 2a - b}{a - 0} = \frac{a}{\cos 2a + b}$$

でこれが等しいから

$$2\sin 2a = \frac{a}{\cos 2a + b} \to b = \frac{a}{2\sin 2a} - \cos 2a = \frac{a - \sin 4a}{2\sin 2a} \quad (答)$$

極限は

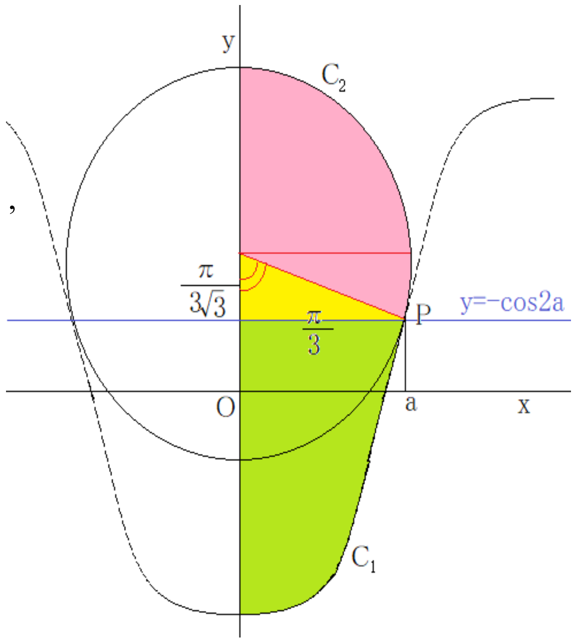
$$\lim_{a \to +0} b = \lim \frac{a - \sin 4a}{2\sin 2a} = \lim \frac{1 - \dfrac{\sin 4a}{a}}{2\dfrac{\sin 2a}{a}} = \lim \frac{1 - 4\dfrac{\sin 4a}{4a}}{4\dfrac{\sin 2a}{2a}} = \frac{1-4}{4 \times 1} = -\frac{3}{4} \quad (答)$$

[2] $a = \dfrac{\pi}{3} \to b = \dfrac{\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}$ で、 $P\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ は点 P は円 $C_2$ 上にあるから

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2 = r^2 \to r = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

よって $C_2 : x^2 + \left(y - \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2$

右半分の面積を右図のように 3 色に分けて求める。




緑: $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \left(\frac{1}{2} + \cos 2x\right) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,

黄: $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\pi^2}{18\sqrt{3}}$ ,

桃: $\pi\left(\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{81}\pi^3$ .

求めるべき面積は

$$2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi^2}{18\sqrt{3}} + \frac{4}{81}\pi^3\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{9\sqrt{3}} + \frac{8}{81}\pi^3 \quad (答)$$

【4】[1]　$t=e^x, dt=e^x dx$　と置換して

$$\int \frac{dx}{e^x+2}=\int \frac{1}{t+2}\cdot\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}(\log t-\log(t+2))+C$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log(e^x+2)+C\quad(答)$$

[2] 曲線の弧長は

$$L(t)=\int_0^t\sqrt{1+\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right)^2}\,dx$$

だから　$L'(t)=\sqrt{1+f'(t)^2}$　である。よって x>0 において

$$f'(x)=L'(x)-e^x-2=\sqrt{1+f'(x)^2}-e^x-2\quad,$$

$$(f'(x)+e^x+2)^2=1+f'(x)^2\quad,$$

$$e^{2x}+4+2e^x f'(x)+4e^x+4f'(x)=1\quad,$$

$$f'(x)=-\frac{e^{2x}+4e^x+3}{2e^x+4}=-\frac{1}{2}e^x-1+\frac{1}{2(e^x+2)}\quad,$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}e^x-x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log(e^x+2)\right)+C=-\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\log(e^x+2)+C\quad.$$

f(x) は x=0 で連続だから

$$\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\log(e^x+2)+C\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log 3+C=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log 3$$

とならねばならない。よって　$C=1$　. したがって

$$f(x)=-\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\log(e^x+2)+1\quad,$$

$$f(\log 2)=-1-\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}\log 4+1=-\frac{5}{4}\log 2\quad,$$

また

$$L(x)=f(x)+e^x+2x-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\log 3$$

より

$$L(\log 2)=-\frac{5}{4}\log 2+2+2\log 2-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\log 3=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\log 2+\frac{1}{4}\log 3\quad(答)$$