1 (60 点)

次の問いに答えよ.

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が, 3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ.

(2) k 個の連続した正の整数 x_1, $\cdots$, x_k に対して,

$$|x_j{}^2 - x_j - 23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と, その k に対する連続した正の整数 x_1, $\cdots$, x_k をすべて求めよ. ここで k 個の連続した整数とは,

$$x_1,\ x_1 + 1,\ x_1 + 2,\ \cdots,\ x_1 + k - 1$$

となる列のことである.

2 (60 点)

複素数平面上の異なる 3 点 A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここで A，B，C は同一直線上にないと仮定する．

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ．

(2) △ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4 + \mathrm{BP}^4 + \mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし 2 点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

3 (60 点)

座標空間に5点

$$O(0,0,0),\ A(3,0,0),\ B(0,3,0),\ C(0,0,4),$$
$$P(0,0,-2)$$

をとる．さらに $0 < a < 3$，$0 < b < 3$ に対して2点 $Q(a, 0, 0)$ と $R(0, b, 0)$ を考える．

(1) 点P，Q，Rを通る平面をHとする．平面Hと線分ACの交点Tの座標，および平面Hと線分BCの交点Sの座標を求めよ．

(2) 点Q，R，S，Tが同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ．

4 (60 点)

n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

5 (60 点)

k を正の整数とし，$a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく．

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3) (2) の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 m，n $(m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4) (2) と (3) の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 p，q，r $(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値を求めよ．