【第 1 問】(1) 順次、値を求めてみよう。

$x=1\to|1-1-23|=|-23|\equiv 2$,絶対値＝素数

$x=2\to|4-2-23|=|-21|\equiv 0$,絶対値≠素数

$x=3\to|9-3-23|=|-17|\equiv 2$,絶対値＝素数

$x=4\to|16-4-23|=|-11|\equiv 2$,絶対値＝素数

$x=5\to|25-5-23|=|-3|\equiv 0$,絶対値＝素数

$x=6\to|36-6-23|=7\equiv 1$,絶対値＝素数

$x=7\to|49-7-23|=19\equiv 1$,絶対値＝素数

$x=8\to|64-8-23|=33\equiv 0$,絶対値≠素数

ここで気づくのは、 $x\geq 6$ のときに限って絶対値記号の中が正になることだ。(2 次関数の性質から分かる。)さらに $x=6,7,8,\cdots$ と変化すると剰余は $1\to 1\to 0\to\cdots$ とグルグル回るだろうということだ。実際 $x\equiv 0,1,2$ に対して

$x^2-x-23\equiv 0-0+1\equiv 1$,絶対値＝？

$x^2-x-23\equiv 0-0+1\equiv 1$,絶対値＝？

$x^2-x-23\equiv 4-2+1\equiv 0$ 絶対値≠素数

となる。この中に剰余＝2 はないから、あるとしたら $1\leq x\leq 5$ の範囲だ。上の計算したものからピックアップして、 $x=1,3,4$ (答)

(2) 剰余＝0 だと 3 で割り切れるから素数でないと早合点してはならない。ちょうど

$|x^2-x-23|=3$

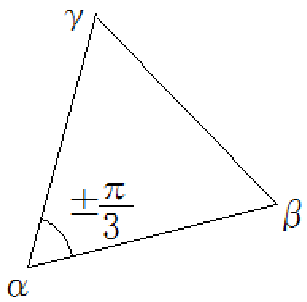
になれば、剰余＝0 かつ素数だ。それは $x=5$ のときだけだ。 $x\geq 6$ になると 3 回に 1 回は必ず素数でない 3 の倍数が巡ってくる。その状況を上に赤字で示した。

連続 3 個以上素数が連続するエリアは、あるとしたら $x\leq 7$ の内にしかない。探すと

$x=3,4,5,6,7$ (答)

の連続 5 個のエリアで、k の最大値は $k=5$ (答)

【第 2 問】2 辺の長さが等しく、その間の角が左回りに測って $\pm\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分。よって



$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

じゃあ、 $\epsilon=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ ってどんな複素数かというと 3 乗すると -1 になる数、だから $\epsilon^3=-1$. この方程式を解こうとすると

$$\epsilon^3+1=(\epsilon+1)(\epsilon^2-\epsilon+1)=0$$

となって不純物の $\epsilon=-1$ が紛れ込んで来る。だから ϵ が満たす方程式は

$$\epsilon^2-\epsilon+1=0$$

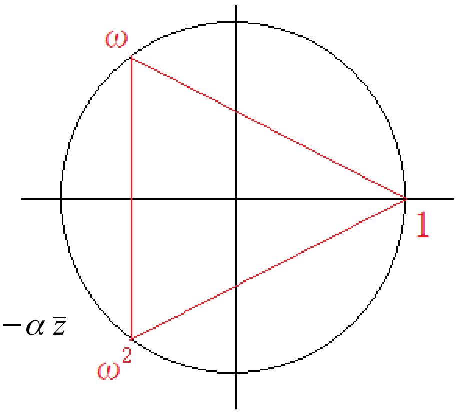
ここに $\epsilon=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を代入すればよい。

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)+1=0 \quad ,$$

$$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0 \quad ,$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0 \quad \blacksquare$$

(2) 半径 1 で求めて、相似比 R 倍だから、前者は R^2 倍、後者は R^4 倍すればよい。そこで三角形の 3 頂点を



$$1, \omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi, \omega^2=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

とする。前問と似てくるが $\omega^3=1$ から ω が満たす方程式は

$$\omega^2+\omega+1=0$$

である。P を表す複素数を z とする。

$$AP^2=|z-\alpha|^2=(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=|z|^2-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}+|\alpha|^2=2-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}$$

で、残り 2 つも同様だから

$$AP^2+BP^2+CP^2=2\times3-(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma})z-(\alpha+\beta+\gamma)\bar{z}$$

ここに $\alpha=1, \beta=\omega, \gamma=\omega^2$ を代入すれば

$$=6-(1+\omega^2+\omega)z-(1+\omega+\omega^2)\bar{z}=6-0\times z-0\times\bar{z}=6$$

半径＝R なら $AP^2+BP^2+CP^2=6R^2$ (答)

後者は

$$AP^4=(2-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z})^2=4+\bar{\alpha}^2z^2+\alpha^2\bar{z}^2-4\bar{\alpha}z-4\alpha\bar{z}+2|\alpha|^2|z|^2$$

$$=6+\bar{\alpha}^2z^2+\alpha^2\bar{z}^2-4\bar{\alpha}z-4\alpha\bar{z}$$

で、残り 2 つも同様だから

$$AP^4+BP^4+CP^4$$

$$=6\times3-(\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2+\bar{\gamma}^2)z^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\bar{z}^2-4(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma})z-4(\alpha+\beta+\gamma)\bar{z}$$

$$=18-(1+\omega^4+\omega^2)z^2-(1+\omega^2+\omega^4)\bar{z}^2-4(1+\omega^2+\omega)z-4(1+\omega+\omega^2)\bar{z}$$

$$=18-0\times z^2-0\times\bar{z}^2-4\times0\times z-4\times0\times\bar{z}=18$$

半径＝R なら $AP^4+BP^4+CP^4=18R^4$ (答)

【第 3 問】(1) 平面 H の方程式を　$Ax+By+Cz=D$　とおいて、3 点代入、

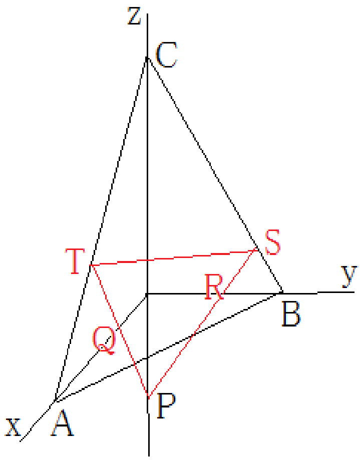
$$P:-2C=D \quad ,$$
$$Q:aA=D \quad ,$$
$$R:bB=D$$

より　$A=\dfrac{D}{a}, B=\dfrac{D}{b}, C=-\dfrac{D}{2}$　だから　$H:\dfrac{D}{a}x+\dfrac{D}{b}y-\dfrac{D}{2}z=D$　これを　$\dfrac{2ab}{D}$　倍して

$$H:2bx+2ay-abz=2ab$$

直線 AC の方程式は　$(x,y,z)=(0,0,4)+t(3,0,-4)$　だからこれを H の式に代入して

$$2b\cdot 3t-ab(4-4t)=2ab \to (6b+4ab)t=6ab \to t=\frac{3a}{2a+3}$$



よって

$$T=(3t,0,4-4t)=\left(\frac{9a}{2a+3},0,\frac{-4a+12}{2a+3}\right) \quad (答)$$

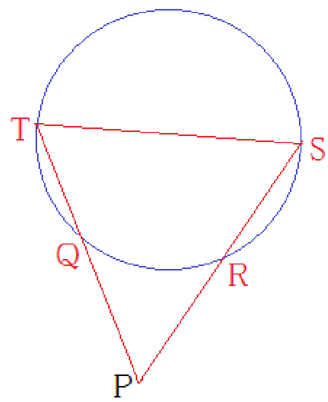
同様に、直線 BC の方程式は　$(x,y,z)=(0,0,4)+t(0,3,-4)$

$$2a\cdot 3t-ab(4-4t)=2ab \to (6a+4ab)t=6ab \to t=\frac{3b}{2b+3} \quad ,$$

$$S=(0,3t0,4-4t)=\left(0,\frac{9b}{2b+3},\frac{-4b+12}{2b+3}\right) \quad (答)$$

(2) 5 点 P, Q, R, T, S は同一平面 H 上にある。4 点が同一円周上にある必要十分条件を方ベキの定理で表せば

$$PQ\cdot PT=PR\cdot PS$$

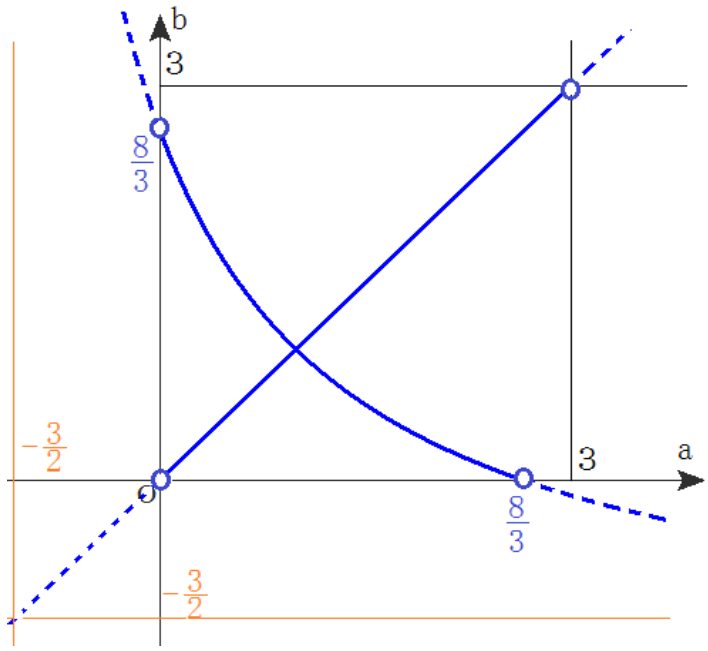


両辺を 2 乗して

$$(a^2+4)\left\{\left(\frac{9a}{2a+3}\right)^2+\left(\frac{-4a+12}{2a+3}+2\right)^2\right\}$$
$$=(b^2+4)\left\{\left(\frac{9b}{2b+3}\right)^2+\left(\frac{-4b+12}{2b+3}+2\right)^2\right\} \quad ,$$
$$(a^2+4)\left(\frac{81a^2+18^2}{(2a+3)^2}\right)=(b^2+4)\left(\frac{81b^2+18^2}{(2b+3)^2}\right) \quad ,$$
$$\frac{(a^2+4)^2}{(2a+3)^2}=\frac{(b^2+4)^2}{(2b+3)^2} \quad ,$$
$$(a^2+4)(2b+3)=(2a+3)(b^2+4) \quad ,$$
$$(a-b)(2ab+3a+3b-8)=0 \quad ,$$
$$b=a, b=\frac{-3a+8}{2a+3}=-\frac{3}{2}+\frac{25/2}{2a+3}$$

2 本のグラフの描くのだが、後者は

$a=-\dfrac{3}{2}, b=-\dfrac{3}{2}$　を漸近線とする直角双曲線である。

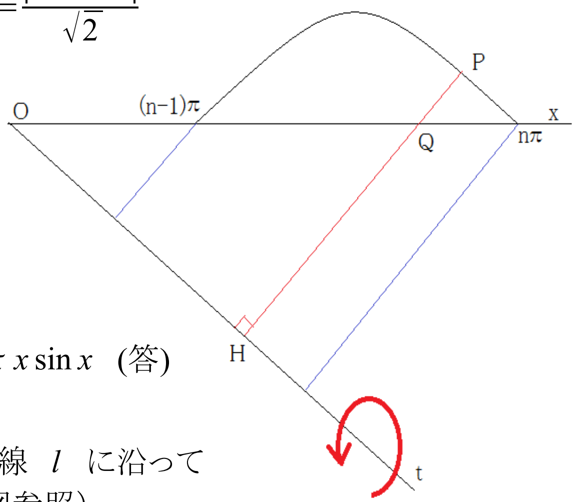


【第４問】(1) 点　$P=(x,\sin x)$　を通って直線　$l:x+y=0$　に垂直な直線は

$$Y-\sin x=X-x$$

だから　x　軸との交点は　$Q(x-\sin x,0)$　である。点 P, Q から直線　l　に下した垂線の長さ(＝点と直線の距離)をそれぞれ　d_P,d_Q　とすれば

$$d_P=\frac{|x+\sin x|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+\sin x|}{\sqrt{2}}=,d_Q=\frac{|x-\sin x+0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x-\sin x|}{\sqrt{2}}$$



線分 PQ を直線　l　の周りにぶん回すと、穴の開いた円板(DVD みたいな) 図形になる。(心配なことは PQ が曲線と P 以外の点で交わらないか、であるが曲線の傾きは　$x=(n-1)\pi$　のときだけ 1 で、それより右では傾きはゆるいから、杞憂だ。)

DVD の面積は

$$\pi d_P^2-\pi d_Q^2=\pi\{\frac{(x+\sin x)^2}{2}-\frac{(x-\sin x)^2}{2}\}=2\pi x\sin x \quad (答)$$

(2) 直線　l　の周りに回転するから、　x　軸でなく直線　l　に沿って積分する。そのために新たな変数　t　を導入する(図参照)。

t　軸方向の長さは　x　軸方向の長さを　$\frac{1}{\sqrt{2}}$　倍に縮小したものだから、、Q の横座標が

$x-\sin x$　のとき H の座標は　$t=\frac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$　これを　$x=(n-1)\pi\to n\pi$　にわたって積分する。

$dt=\frac{(1-\cos x)dx}{\sqrt{2}}$　に注意して、

$$V_n=\int 2\pi x\sin x dt=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{2\pi x\sin x(1-\cos x)dx}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)dx$$

である。部分積分を使う。

$$I=\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C\quad ,$$

$$I=\frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\,dx=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$$

だから

$$V_n=\sqrt{2}\pi\left[-x\cos x+\sin x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$$=\sqrt{2}\pi\{n\pi+(n-1)\pi+0+\frac{1}{4}(n\pi-(n-1)\pi)-\frac{1}{8}\times 0\}$$

$$=\sqrt{2}\pi\{(2n-1)\pi+\frac{1}{4}\pi\}=\sqrt{2}\pi^2(2n-\frac{3}{4})\quad (答)$$

【第５問】(1) 部分積分を２回行う。

$$a_{k+2}=\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[-\frac{2}{\pi}x^{k+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1+\frac{2(k+1)}{\pi}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{2(k+1)}{\pi}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{2(k+1)}{\pi}\left\{\left[\frac{2}{\pi}x^k\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1-\frac{2k}{\pi}\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right\}$$

$$=\frac{2(k+1)}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{2k}{\pi}a_k\right)=\frac{4(k+1)}{\pi^2}-\frac{4k(k+1)}{\pi^2}a_k \quad (答)$$

(2) 部分積分を行って

$$k\,a_k=\int_0^1 k\,x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[x^k\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1-\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=1-\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

はさみ打ちをする。 $0\le x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le x^k\,(0\le x\le 1)$ だから

$$0\le\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\le\int_0^1 x^k dx=\frac{1}{k+1}\quad,\quad 0\le\lim\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\le\lim\frac{1}{k+1}=0$$

よって

$$A=\lim k\,a_k=1-\frac{\pi}{2}\lim\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=1 \quad (答)$$

(3) $m=n+s,\ s\ge 1, n\ge 1$ とおいて $k^n(k^s a_k-1)$ の極限を考えよう。

もし $s\ge 2$ だと $\lim k^n(k^s a_k-1)=\lim k^n(k^{s-1}\times k\,a_k-1)=\lim k^n(\lim k^{s-1}\times 1-1)=\infty$ でダメ。

$m=n+1, n\ge 1$ で $\lim k^n(k\,a_k-1)\ne 0$ なるものを探す。(2) の最初の等式と (1) の途中式から

$$k\,a_k-1=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\quad,$$

$$\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2(k+1)}a_{k+2}$$

より

$$k\,a_k-1=\frac{-\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}\quad\cdots\cdots①$$

だから

$$k^n(k\,a_k-1)=\frac{-\pi^2 k^n}{4(k+1)}a_{k+2}=\frac{-\pi^2 k^{n-1}}{4(k+1)}\{(k+2)a_{k+2}-2a_{k+2}\}$$

ここで $\lim n\,a_n=1, \lim a_n=\lim\frac{1}{n}\times\lim n\,a_n=0\times 1=0$ に注意すれば

$$\lim k^n(k\,a_k-1)=-\frac{\pi^2}{4}\times\lim\frac{k^{n-1}}{k+1}\times(1-2\times 0)\quad\cdots\cdots(*)$$

これが０以外の有限確定値になるのは $n-1=1\rightarrow m=3, n=2, B=-\frac{\pi^2}{4}$ (答)

(4) $k^p a_k-k^q\times 1-k^r\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)=k^r\left(k^n(k^s a_k-1)+\frac{\pi^2}{4}\right), r\ge 1, n\ge 1, s\ge 1$ とおいて、内側から攻める。

$k^n(k^s a_k-1)$ は少なくとも $s=1$ にしないとダメ。すると $k^n(k\,a_k-1)$ になるが、これの極限は (*) より $0\,(n=1)$ か、 $-\frac{\pi^2}{4}(n=2)$ か、 $-\infty\,(n>2)$ である。 $n=2$ にするしかない。答はたぶん $r=1$ で、 $k\left(k^2(k\,a_k-1)+\frac{\pi^2}{4}\right)$ の極限が有限確定値 α になるだろう。これがもしホントだとすれば、 $r>1$ のときは $\lim k^r\left(k^2(k\,a_k-1)+\frac{\pi^2}{4}\right)=\lim k^{r-1}\times\lim k\left(k^2(k\,a_k-1)+\frac{\pi^2}{4}\right)=\infty\times\alpha$

でダメだから答は $r=1$ の 1 つに決まる。実際にこのとき収束することを示そう。①を使って

$$k\left(k^2(k\,a_k-1)+\frac{\pi^2}{4}\right)=k^3(k\,a_k-1)+\frac{\pi^2 k}{4}=\frac{-\pi^2 k^3}{4(k+1)}a_{k+2}+\frac{\pi^2 k}{4} \quad \cdots\cdots(**)$$

だが、前問の途中で使った $k\,a_{k+2}=(k+2)a_{k+2}-2a_{k+2}$ という変形をさらに精密化しよう。(1) を移項して整理すると $k\,a_k=1-\dfrac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}$ だから k を k+2 に替えて

$$k\,a_{k+2}=(k+2)a_{k+2}-2a_{k+2}=1-\frac{\pi^2}{4(k+3)}a_{k+4}-2a_{k+2}$$

これを(**) に代入して

$$=\frac{-\pi^2 k^2}{4(k+1)}\times\left(1-\frac{\pi^2}{4(k+3)}a_{k+4}-2a_{k+2}\right)+\frac{\pi^2 k}{4}$$

$$=\frac{\pi^2 k}{4(k+1)}+\frac{\pi^4 k^2}{16(k+1)(k+3)}a_{k+4}+\frac{\pi^2 k}{2(k+1)}\cdot k\,a_{k+2}$$

最終辺の第 1 項は $\dfrac{\pi^2}{4}$ に収束し、第 2 項は $\dfrac{\pi^4}{16}\times 0=0$ ($\lim a_n=0$ だから)に収束する。第 3 項は

$$\frac{\pi^2 k}{2(k+1)}\cdot k\,a_{k+2}=\frac{\pi^2 k}{2(k+1)}\cdot((k+2)a_{k+2}-2a_{k+2})\to\frac{\pi^2}{2}\times(1-2\times 0)=\frac{\pi^2}{2}$$

に収束する。したがって

$$\lim k\left(k^2(k\,a_k-1)+\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}+0+\frac{\pi^2}{2}=\lim\left(k^4 a_k-k^3 A+k\,B\right)=\frac{3\pi^2}{4}$$

答は $p=4, q=3, r=1, \lim=\dfrac{3\pi^2}{4}$ (答)