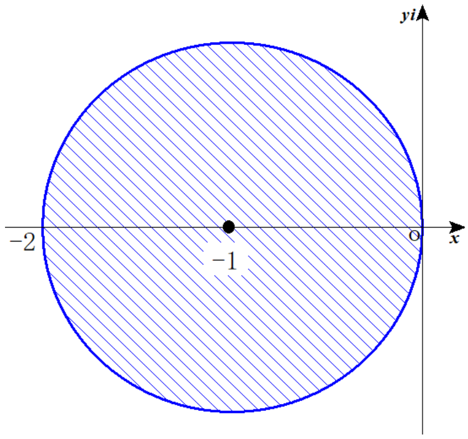
【第 1 問】(1)　$|z-(-1)|\leqq 1$　は点　-1　からの距離が 1 以下を表すから、半径 1 の円の周上及び内部である。

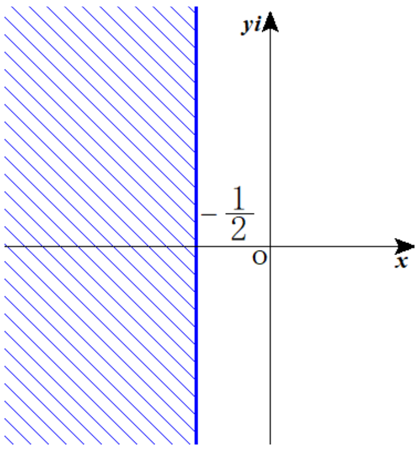


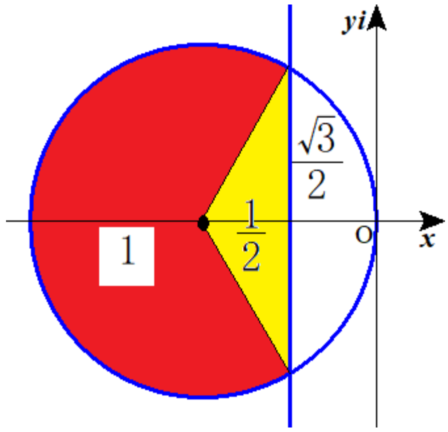
(2) 分母を払って　$|z+1|\leqq|z|$　より

$$|z+1|^2\leqq|z|^2 \to (z+1)(\bar{z}+1)\leqq z\bar{z}$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2}\leqq-\frac{1}{2}$$

よって　$x\leqq-\dfrac{1}{2}$　で虚軸に平行な直線およびその左側。





(3) 中心角 240°の扇形と直角三角形 2 個だから

$$S=\pi\cdot 1^2\times\frac{240}{360}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\quad(\text{答})$$

【第２問】(1)　$a_1+b_1=1+2=3, a_2+b_2=2+(-1)=1$　だから前者は初項 3, 公差 -2 となり、

$$a_n+b_n=3-2(n-1)=5-2n \quad (答)$$

$a_1-b_1=1-2=-1, a_2-b_2=2-(-1)=3$　だから後者は初項 -1, 公比 -3 となあり、

$$a_n-b_n=-(-3)^{n-1} \quad (答)$$

(2) 連立方程式を解けばよい。

$$a_n=\frac{1}{2}\{5-2n-(-3)^{n-1}\} \quad , \quad b_n=\frac{1}{2}\{5-2n+(-3)^{n-1}\} \quad (答)$$

(3)　$a_n b_n=\frac{1}{4}\{(5-2n)^2-(-3)^{2(n-1)}\}=\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot 9^{n-1}$　となる。ここで

$$f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot 9^{x-1}$$

とおいて、これが負であることを示そう。微分すると

$$f'(x)=2\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{4}\cdot 9^{x-1}\log 9 \quad ,$$

$$f''(x)=2-\frac{1}{4}\cdot 9^{x-1}(\log 9)^2 \leq 2-\frac{9}{4}\log 9<2-\frac{9}{4}(\log e^2)^2=-7$$

となる。しかも　$f'(2)=-2=-1-\frac{9}{4}\log 9<0$　だから x≧2 において　$f'(x)$　は単調減少なので

$$f'(x)<0$$

さらに　$f(2)=-2<0$　だから　$f(x)$　も単調減少なので

$$f(x)<0 \quad .$$

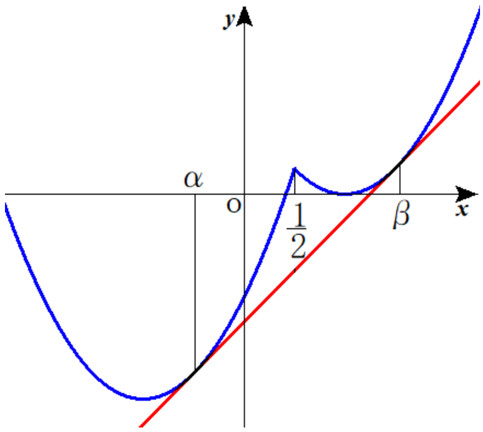
したがって n≧2 ならば　$a_n b_n<0$　■

【第 3 問】(1)所与の関数のグラフは 2 つの放物線

$$y=x^2-2x+1\left(x\geq\frac{1}{2}\right),$$

$$y=x^2+2x-1\left(x\leq\frac{1}{2}\right)$$

をつぎはぎしたものである。



それぞれの放物線の接線の方程式は

$$y-(\beta^2-2\beta+1)=2(\beta-1)(x-\beta),$$

$$y-(\alpha^2+2\alpha-1)=2(\alpha+1)(x-\alpha)$$

だが、この 2 つが一致するのだから係数比較して

$$\alpha+1=\beta-1,$$

$$2\alpha(\alpha+1)-(\alpha^2+2\alpha-1)=2\beta(\beta-1)-(\beta^2-2\beta+1)\to\alpha^2+1=\beta^2-1$$

よって　$\alpha=-\frac{1}{2}, \beta=\frac{3}{2}$　, 接線は　$y=x-\frac{5}{4}$　(答)

(2)　$g'(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=2\sqrt{x^2+1}$

よって　$a=2$　(答)

(3)　$L=\int_{\alpha}^{1/2}\sqrt{dx^2+dy^2}+\int_{1/2}^{\beta}\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{1+y'^2}dx+\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{1+y'^2}dx$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{1+(2x+2)^2}dx+\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{1+(2x-2)^2}dx$$

ここで不定積分を求めておくと、前問から

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}+C$$

$2x\pm2=t, 2dx=dt$　と置換すると

$$\int\sqrt{1+(2x\pm2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{4}\{(2x\pm2)\sqrt{(2x\pm2)^2+1}+\log(2x\pm2+\sqrt{(2x\pm2)^2+1})\}+C$$

したがって

$$L=\frac{1}{4}\left[(2x+2)\sqrt{(2x+2)^2+1}+\log(2x+2+\sqrt{(2x+2)^2+1})\right]_{-1/2}^{1/2}$$

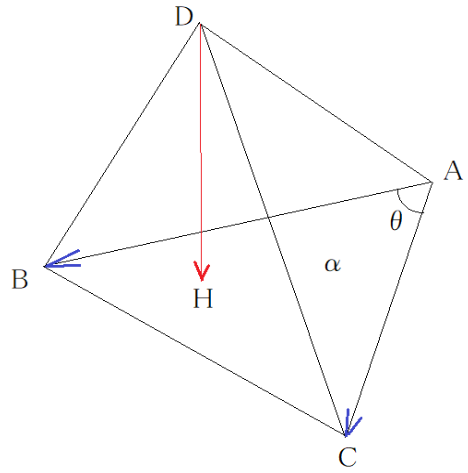
$$+\frac{1}{4}\left[(2x-2)\sqrt{(2x-2)^2+1}+\log(2x-2+\sqrt{(2x-2)^2+1})\right]_{1/2}^{3/2}$$

$$=\frac{1}{4}\{3\sqrt{10}-\sqrt{2}+\log(3+\sqrt{10})-\log(1+\sqrt{2})\}+\frac{1}{4}\{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})-\log(-1+\sqrt{2})\}$$

$$=\frac{1}{4}\{3\sqrt{10}+\sqrt{2}+\log(3+\sqrt{10})-\log(-1+\sqrt{2})\}\quad(答)$$

【第４問】(1)　$\overrightarrow{AB}=(2,-2,0)-(0,3,2)=(2,-5,-2)$　,　$\overrightarrow{AC}=(1,2,2)-(0,3,2)=(1,-1,0)$　より

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{2\cdot1+(-5)\cdot(-1)+(-2)\cdot0}{\sqrt{4+25+4}\sqrt{1+1+0}}=\frac{7}{\sqrt{66}}\quad(\text{答})$$



(2) 求めるベクトルを　$\vec{e}=(x,y,z)$　と内積＝0 より

$$2x-5y-2z=0\quad,$$
$$x-y=0$$

だから　$(x,y,z)=(x,x,-\frac{3}{2}x)$　だが単位ベクトルだから

$$x^2+x^2+\frac{9}{4}x^2=1\to x=\pm\frac{2}{\sqrt{17}}$$

よって　$\pm\vec{e}=\pm(\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{3}{\sqrt{17}})$　(答)

(3) 前問で求めたベクトルが平面の法線ベクトルである。平面の方程式は

$$\frac{2}{\sqrt{17}}x+\frac{2}{\sqrt{17}}(y-3)-\frac{3}{\sqrt{17}}(z-2)=0$$

垂線 DH の方程式は

$$(x,y,z)=(-1,-3,3)+t(\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{3}{\sqrt{17}})$$

これを平面の式に代入して

$$\frac{2}{\sqrt{17}}(-1+\frac{2}{\sqrt{17}}t)+\frac{2}{\sqrt{17}}(-6+\frac{2}{\sqrt{17}}t)-\frac{3}{\sqrt{17}}(1-\frac{3}{\sqrt{17}})=0\quad,\quad t=\sqrt{17}$$

よって H の座標は　$(x,y,z)=(-1,-3,3)+\sqrt{17}(\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{3}{\sqrt{17}})=(1,-1,0)$　(答)

(4) 底面が△ABC で高さが DH だから

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta\times|\overrightarrow{DH}|$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-5)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{1-\cos^2\theta}\times|t\,\vec{e}|$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{66}\sqrt{1-\frac{49}{66}}\times\sqrt{17}=\frac{17}{6}\quad(\text{答})$$