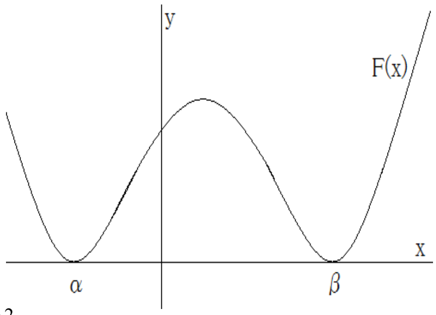
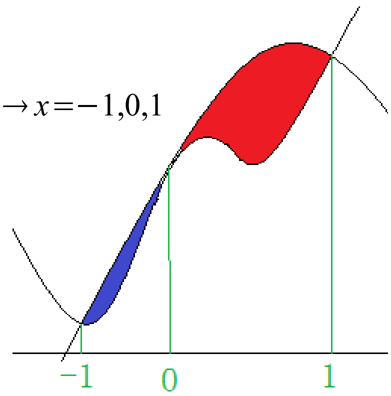
【第 1 問】(1)　$F(x)=f(x)-g(x)=(x^4-2x^2+4x)-(mx+n)$
　$=x^4-2x^2+(4-m)x-n$
を考える。 $g(x)$ だけ引きずりおろしたものになるから、
P, Q で接する共通接線は x 軸になる。
2 つの接点の x 座標を $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ とすれば、4 次の係数が 1 であるから



$$F(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$
$$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+((\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+(\alpha\beta)^2$$
先の式と係数比較し
$$\alpha+\beta=0,(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-2,-2\alpha\beta(\alpha+\beta)=4-m,-n=(\alpha\beta)^2$$
だから
$$\beta=-\alpha, \alpha^2=1, m=4, n=-\alpha^4=-1$$
となる。よって $g(x)=mx+n=4x-1$ (答)
また $\alpha=-1, \beta=1 \to f(\alpha)=-5, f(\beta)=3$ だから、2 次関数を $h(x)=ax^2+bx$ とおいて
$h(-1)=a-b=-5, f(1)=a+b=3 \to a=-1, b=4$ だから $h(x)=-x^2+4x$ (答)

(2) 2 曲線の交点の x 座標は
$$(-x^2+4x)-(x^4-2x^2+4x)=-(x^4-x^2)=-x^2(x+1)(x-1)=0 \to x=-1,0,1$$
$$S=\int_{-1}^{1}(-x^4+x^2)dx=2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{15}$$ (答)



【第 2 問】(1)　$m=3k+1, 3k+2$ に対応して
$$(m+2)(m+1)=(3k+3)(3k+2)=3(k+1)(3k+2) \ ,$$
$$(m+2)(m+1)=(3k+4)(3k+3)=3(3k+4)(k+1)$$
だから、いずれも 3 の倍数。しかも $m+1, m+2$ は連続する 2 数だからどちらかは偶数。
所与の数は、3 でも 2 でも割り切れるから、LCM=6 の倍数である。■

(2)　$m=4k+1 \to (m+3)(m+1)=(4k+4)(4k+2)=8(k+1)(2k+1)$,
　$m=4k+3 \to (m+3)(m+1)=(4k+6)(4k+4)=8(2k+3)(k+1)$
いずれにしても 8 の倍数である。■

(3) 対偶を証明する。もし m が奇数ならば $m=4k+1, 4k+3$ に対応して
$$(m+3)(m+2)(m+1)=(4k+4)(4k+3)(4k+2)=8(k+1)(4k+3)(2k+1) \ ,$$
$$(m+3)(m+2)(m+1)=(4k+6)(4k+5)(4k+4)=8(2k+3)(4k+5)(k+1)$$
だから、8 の倍数、また連続する 3 数だからいずれか 1 つは 3 の倍数ゆえ、所与の数は 8 でも 3 でも割り切れる。よって LCM=24 の倍数である。■

【第３問】(1)　$a_k=[6x^2-40x]_c^k=6k^2-40k-(6c^2-40c)$

ところで　$c=\dfrac{20-\sqrt{526}}{6}\to(6c-20)^2=526\to 6c^2-40c-21=0$　に注意して

$$a_k=6k^2-40k-21\quad,$$

$$S_n=6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-40\cdot\frac{n(n+1)}{2}-21n$$

$$=n\{(n+1)(2n+1)-20(n+1)-21\}=n(2n^2-17n-40)\quad\text{(答)}$$

(2)　$a_k(k=1,2,3,\cdots)$　を順次足していくのだが、初めは負項で途中から正項に変わる。負項を全部足し終わったとき、総和は最小になる。いつまで負項かと言うと

$$a_k=6k^2-40k-21<0\quad,$$

$$1\leq k<\frac{20+\sqrt{526}}{6}$$

の間だ。この範囲の最大の整数値が最小値を与えるkだ。

$$7=\frac{20+22}{6}=\frac{20+\sqrt{484}}{6}<\frac{20+\sqrt{526}}{6}<\frac{20+\sqrt{529}}{6}=\frac{20+23}{6}=7.2$$

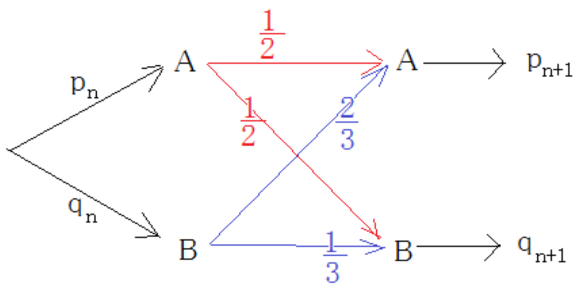
より　$\dfrac{20+\sqrt{526}}{6}=7.**$　。よって　$1\leq k\leq 7$　だから７まで足したとき最小で、最小値は

$$S_7=7(98-119-40)=7\times(-61)=-427\quad\text{(答)}$$

【第４問】(1) 右の樹形図より

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{2}{3}q_n\quad,$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n\quad\text{(答)}$$



(2) 前問の答の第１式より

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n)=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3}$$

数列　$\{p_n\}$　が収束するとして、その極限値を　α　とすると　$\alpha=-\dfrac{1}{6}\alpha+\dfrac{2}{3}\to\alpha=\dfrac{4}{7}$

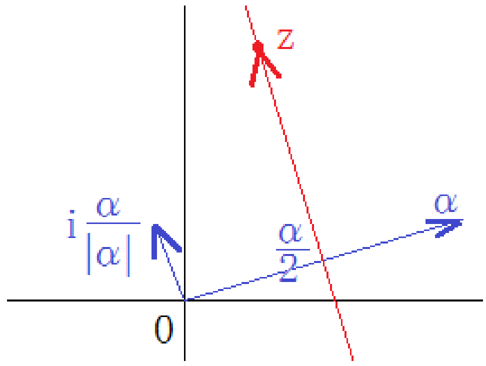
$$p_{n+1}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$$

ところで　$p_0=1$　だったから　$\left\{p_n-\dfrac{4}{7}\right\}$　は初項　$p_0-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$　,公比　$-\dfrac{1}{6}$　の等比数列であるから

$$p_n=\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{4}{7}\quad,$$

$$q_n=1-p_n=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{3}{7}\quad\text{(答)}$$

【第 5 問】(1) 直線 l が 2 点 $0, \alpha$ を結ぶ線分の垂直二等分線であることと同値である。それは $z-\frac{\alpha}{2}$ が α と垂直であることと同値。α の向きを変えずに長さを 1 に縮小(拡大)したものが $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ で、これを 90°回転すると $i\frac{\alpha}{|\alpha|}$ になる。$z-\frac{\alpha}{2}$ は、これと垂直で長さは $\left|z-\frac{\alpha}{2}\right|$ だから



$$z-\frac{\alpha}{2}=\pm i\frac{\alpha}{|\alpha|}\times\left|z-\frac{\alpha}{2}\right|$$

2 乗して

$$\left(z-\frac{\alpha}{2}\right)^2=-\frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}\times\left|z-\frac{\alpha}{2}\right|^2 \quad ,$$

$$\left(z-\frac{\alpha}{2}\right)^2=-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\times\left(z-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{\bar{\alpha}}{2}\right)$$

両辺を $z-\frac{\alpha}{2}$ で割って

$$\bar{\alpha}\left(z-\frac{\alpha}{2}\right)=-\alpha\times\left(\bar{z}-\frac{\bar{\alpha}}{2}\right)$$

割り算したことによって同値性が崩れることはない。なぜなら最後の式も $z-\frac{\alpha}{2}$ を満足するからである。あとは $\bar{\alpha}(2z-\alpha)=-\alpha\times(2\bar{z}-\bar{\alpha})\to 2\bar{\alpha}z+2\alpha\bar{z}=2|\alpha|^2$ ■

(2) 異なる 2 直線が交わるということは、平行でないことと同値である。2 直線に垂直な複素数が α, β であるから、この 2 つの複素数が平行でないことと同値。「平行」は次の命題たちと同値。

$\alpha=k\beta$ (k は実数),

$\alpha=k\beta$ が実数,

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$,

$\bar{\alpha}\beta=\alpha\bar{\beta}$,

$\bar{\alpha}\beta$ が実数

否定をとって、交点を持つことは「 $\bar{\alpha}\beta$ が実数でない」と同値である。■

2 直線の方程式は

$$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=|\alpha|^2 \quad , \quad \bar{\beta}z+\beta\bar{z}=|\beta|^2$$

ここから $\bar{z}$ を消去するために第 1 式× β －第 2 式× α として

$$(\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta})z=|\alpha|^2\beta-|\beta|^2\alpha\to z=\frac{|\alpha|^2\beta-|\beta|^2\alpha}{\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}} \quad \text{(答)}$$

【第 6 問】(1)　$y=\tan x$ の逆関数の導関数は

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}=\frac{1}{1/\cos^2 x}=\cos^2 x$$

ところで $\frac{1}{\cos^2}x=1+\tan^2 x$ より $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$ だから

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+y^2}\to\{f^{-1}(x)\}'=\frac{1}{1+x^2}\quad \text{(答)}$$

(2)　$x=\tan\theta$ と置換する。 $dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta},\theta=0\to\frac{\pi}{4}$ に注意して

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\pi/4}\cos^{2n-2}\theta\,d\theta$$

次の項は

$$I_{n+1}=\int_0^{\pi/4}\cos^{2n}\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\cos^{2n-2}\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=I_n-\int_0^{\pi/4}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

最右辺の第 2 項は部分積分で、

$$\int_0^{\pi/4}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}(\cos^{2n-2}\theta\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=[-\frac{1}{2n-1}\cos^{2n-1}\theta\sin\theta]_0^{\pi/4}+\frac{1}{2n-1}\int_0^{\pi/4}\cos^{2n}\theta$$

$$=-\frac{1}{2n-1}(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{2n-1}I_{n+1}$$

したがって

$$I_{n+1}=I_n+\frac{1}{2n-1}(\frac{1}{2})^n-\frac{1}{2n-1}I_{n+1}\quad ,$$

$$\frac{2n}{2n-1}I_{n+1}=I_n+\frac{1}{2n-1}(\frac{1}{2})^n\quad ,$$

$$I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}I_n+\frac{1}{n}(\frac{1}{2})^{n+1}\quad \text{(答)}$$

(3)　$I_3=\frac{3}{4}I_2+\frac{1}{16}=\frac{3}{4}(\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{4})+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}I_1+\frac{1}{4}$ となって、あとは初項だ。

$$I_1=\int_0^{\pi/4}\cos^0\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

だから $I_3=\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}$ (答)