【1】(1)　$(3^{-2})^{x+2} > (3^{-3})^{x} \to -2(x+2) > -3x \to x > 4$　(答)

(2)　$2020 \div 7 = 288 \cdots 4 \to 2020 \equiv 4 (mod.7)$　より　$2020^{10} \equiv 4^{10} = 2^{20} = (2^3)^6 \times 2^2 \equiv 1^6 \times 4 \equiv 4 (mod.7)$
よって求めるべき剰余は 4 (答)

(3)　$f'(x) = 3x^2 - 18x + 23, f'(2) = -1$　だから接線は　$y - 6 = -(x-2) \to y = -x + 8$
これと　$y = x^3 - 9x^2 + 23x - 12$　で囲まれた図形だが、交点の x 座標は

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 12 = -x + 8 \to x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0 \to (x-2)^2(x-5) = 0 \to x = 2, 2, 5$$

よって

$$S = -\int_2^5 (x^3 - 9x^2 + 24x - 20)\,dx = -\left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 20x\right]_2^5$$

$$= -\frac{1}{4}(625-16) + 3(125-8) - 12(25-4) + 20(5-2) = -\frac{609}{4} + 351 - 252 + 60 = \frac{27}{4}$$　(答)

【2】　$x = a + bi \to (x-a)^2 = -b^2 \to x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$　だから、所与の数を解に持つ方程式は

$$(x-2)(x^2 - 2ax + a^2 + b^2) = x^3 - (2a+2)x^2 + (a^2 + 4a + b^2)x - 2(a^2 + b^2) = 0$$

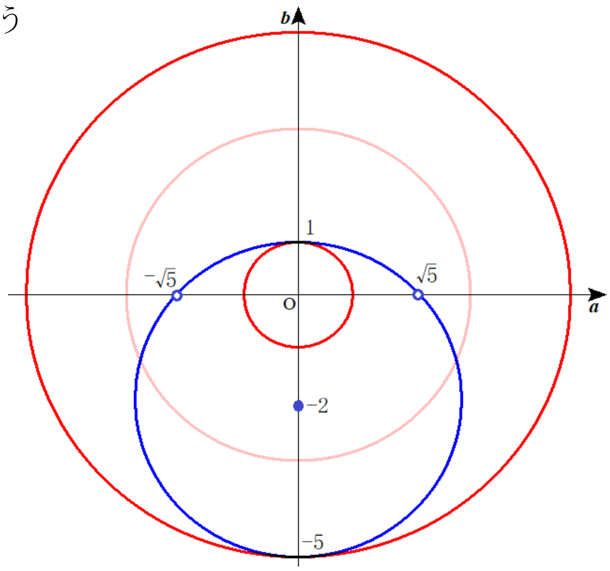
これと所与の 3 次方程式を係数比較すれば

$$c = 2, a^2 + b^2 = -4b + 2c + 1, a^2 + b^2 = \frac{k^2}{4}$$

だから

$$\{a^2 + b^2 = -4b + 5\} \land \{a^2 + b^2 = \frac{k^2}{4}\} \Leftrightarrow \{a^2 + (b+2)^2 = 9\} \land \{a^2 + b^2 = \frac{k^2}{4}\}$$

なる実数の組 (a, b)（ただし $b \neq 0$ ）が存在する。2 つの方程式が表すグラフを描こう。
中心　$(0, -2)$　, 半径 3 の青い円と共有点を持つような原点中心、半径　$\frac{k}{2}$　の赤い同心円を考える。
これより　$1 \le \frac{k}{2} \le 5$　だが $b \neq 0$ より　$\frac{k}{2} \neq \sqrt{5}$　.
よって　$2 \le k < 2\sqrt{5}, 2\sqrt{5} < k \le 10$　(答)



【3】(1)　$\vec{OA}=(1,-2,2)$ が平面の法線ベクトルになる。だから平面の方程式は

$$1(x-1)-2(y+2)+2(z-2)=0 \quad ,$$

$$x-2y+2z=9$$

線分 BC の垂直二等分面が α だから、中点が平面上で、 $\vec{BC}$ が法線ベクトルに平行だ。

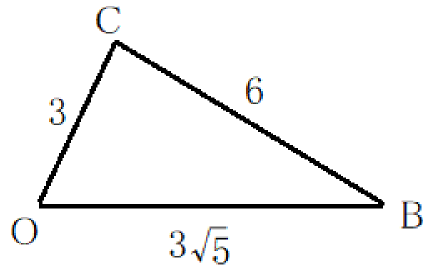
$B=(x_0,y_0,z_0)$ として

$$\frac{x_0+4}{2}-2\cdot\frac{y_0-2}{2}+2\cdot\frac{z_0+5}{2}=9 \quad , \quad (x_0-4,y_0+2,z_0-5)=k(1,-2,2)$$

後者からの $x_0=4+k\,,\,y_0=-2-2k\,,\,z_0=5+2k$ を前者に代入して

$$(k+8)-2(-2k-4)+2(2k+10)=18\to k=-2$$

よって $C=(x_0,y_0,z_0)=(2,2,1)$ (答)



(2) 3 辺の長さを計算。

$$OB=\sqrt{4^2+(-2)^2+5^2}=3\sqrt{5} \quad ,$$

$$OC=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3 \quad ,$$

$$BC=|\vec{BC}|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=6$$

△OBC は∠C=90°の直角三角形だ。その面積は $\frac{1}{2}\times3\times6=9$ (答)

【4】(1)　$\bar{a}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$ だが、これって複素数の極形式に似ている。そこで

$$z=\cos2\theta+i\sin2\theta$$

とおけば $z^k=\cos(2k\theta)+i\sin(2k\theta)$ だから、これの平均の実部をとればよい。

$$\bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z^k=\frac{z}{n}\cdot\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{z^n-1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{\cos(2n\theta)+i\sin(2n\theta)-1}{n(1-\cos2\theta+i\sin2\theta)}$$

$$=\frac{(\cos(2n\theta)-1+i\sin(2n\theta))(1-\cos2\theta-i\sin2\theta)}{n\{(1-\cos2\theta)^2+\sin^2 2\theta\}}$$

これの実部は

$$\bar{a}=\frac{(\cos(2n\theta)-1)(1-\cos2\theta)+\sin(2n\theta)\sin2\theta}{n(2-2\cos2\theta)}$$

分母に半角の公式を使って

$$=\frac{-\cos(2n\theta)\cos2\theta+\sin(2n\theta)\sin2\theta+\cos(2n\theta)+\cos2\theta-1}{n\times4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\{-\cos(2n\theta+2\theta)+\cos(2n\theta)\}+\{\cos2\theta-1\}}{n\times4\sin^2\theta}$$

分子の前項に和・差を積に直す公式、後項に半角の公式を使って

$$=\frac{2\sin(2n\theta+\theta)\sin\theta-2\sin^2\theta}{n\times4\sin^2\theta}=\frac{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta}{2n\sin\theta} \quad ■$$

(2) 分散は 2 乗の平均－平均の 2 乗、 $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ である。

$$E(X^2)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2(2k\theta)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\cos(4k\theta)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\cdot 2\theta)$$

前問の答で θ の代わりに 2θ になるから

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\times\frac{1}{2n\sin 2\theta}\{\sin(4n\theta+2\theta)-\sin 2\theta\}$$

よって

$$V(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\times\frac{1}{2n\sin 2\theta}\{\sin(4n\theta+2\theta)-\sin 2\theta\}-\frac{1}{4n^2\sin^2\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}^2$$

n, θ に所与の数を代入すれば

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\times\frac{1}{20\sin\frac{\pi}{10}}\{\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}\}-\frac{1}{400\sin^2\frac{\pi}{20}}\{-\sin\frac{\pi}{20}-\sin\frac{\pi}{20}\}^2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\times 0-\frac{1}{100}=\frac{49}{100}$$

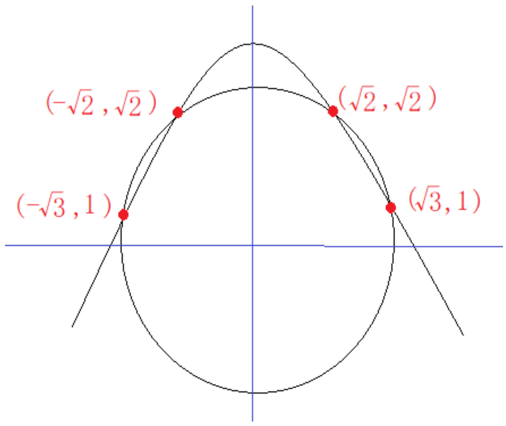
したがって $s-\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}$ (答)

【5】(1) $y=(1-\sqrt{2})x^2+3\sqrt{2}-2, x^2+y^2=4$ から x を消去して

$y=(1-\sqrt{2})(4-y^2)+3\sqrt{2}-2, x^2+y^2=4\to(\sqrt{2}-1)y^2-y+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$,

$y^2-(\sqrt{2}+1)y+\sqrt{2}=0\to(y-1)(y-\sqrt{2})=0$,

$(x,y)=(\pm\sqrt{3},1),(\pm\sqrt{2},\sqrt{2})$ (答)



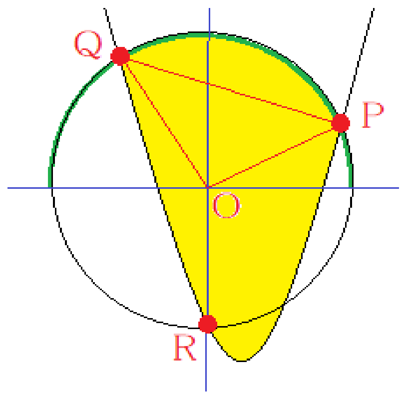
(2) $y=f(x)+g(x)$ ってどんな放物線だろうか。
2 次の係数が $\sqrt{3}+1-\sqrt{2}>0$ だから下に凸。
連立方程式 $y=f(x)+g(x), x^2+y^2=4$ から y を消去すれば x の 4 次方程式ができるので放物線と円との共有点は 4 個だ。(前問でもそうだった。)

$y(\sqrt{3})=f(\sqrt{3})+g(\sqrt{3})=1+0=1$,

$y(-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})+g(-\sqrt{2})=\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$,

$y(0)=f(0)+g(0)=(3\sqrt{2}-2)+(-3\sqrt{2})=-2$

より、少なくとも $P(\sqrt{3},1), Q(-\sqrt{2},\sqrt{2}), R(0,-2)$ の 3 点は共有点だ。あともう 1 点が分からないが、それは構わない。
右図から分かるように円の上半と放物線が第 4 の点で交わることはありえない。(もしそれだと、放物線のカーブが 2 つできてしまうから。)



直線 OP, OQ はそれぞれ $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x, y=-x$ であり、偏角はそれぞれ 30°, 135° (差が 105°) である。求めるべき面積は
△OPQ＋OPR＋OQR

$$=\pi\cdot 2^2\times\frac{105}{360}+\int_0^{\sqrt{3}}\{\frac{1}{\sqrt{3}}x-(f(x)+g(x))\}dx-\int_0^{-\sqrt{2}}\{-x-(f(x)+g(x))\}dx$$

($f(x)+g(x)=(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})x^2+(\sqrt{6}-3)x-2$ に注意して)

$$=\frac{7}{6}\pi+\left[-\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{3}x^3+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{2}\right)x^2+2x\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{3}x^3+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3}{2}\right)x^2-2x\right]_0^{-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{7}{6}\pi-(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})\sqrt{3}+3\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{2}\right)+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2})+2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3}{2}\right)+2\sqrt{2}$$

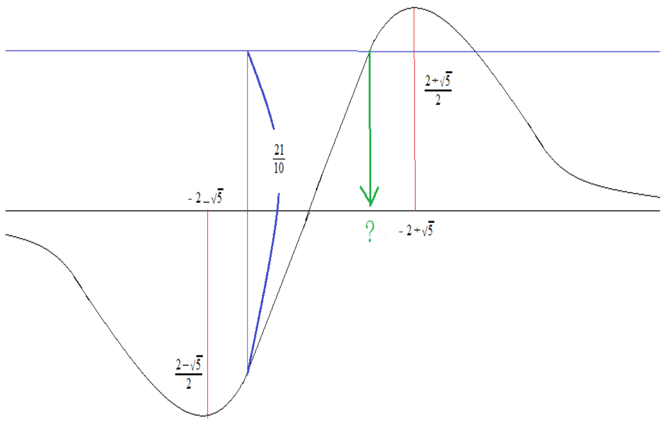
$$=\frac{7}{6}\pi-3-\sqrt{3}+\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2}+\frac{9}{2}+2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{4}{3}+1+\sqrt{6}-3+2\sqrt{2}$$

$$=\frac{7}{6}\pi-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{6}\quad \text{(答)}$$

【6】 $f'(x)=\frac{(x^2+1)-2x(x+2)}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)^2}$ だから、臨界点は $x=-2\pm\sqrt{5}$ で

極値は $f(-2\pm\sqrt{5})=\frac{-2\pm\sqrt{5}+2}{10\mp4\sqrt{5}}=\pm\frac{1}{2(\sqrt{5}\mp2)}=\pm\frac{\sqrt{5}\pm2}{2}=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$ ，そして $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.

x	…	$-2-\sqrt{5}$	…	-3	…	$-2+\sqrt{5}$	…
f'	-	0	+	+	+	0	-
f	↘	$\frac{2-\sqrt{5}}{2}$	↗	$-\frac{1}{10}$	↗	$\frac{2+\sqrt{5}}{2}$	↘



閉区間 $[-3,-2+\sqrt{5}]$ では単調増加で、中間値の定理によりこの範囲内に関数値が

$$f(-3)+\frac{11}{5}=-\frac{1}{10}+\frac{11}{5}=\frac{21}{10}$$

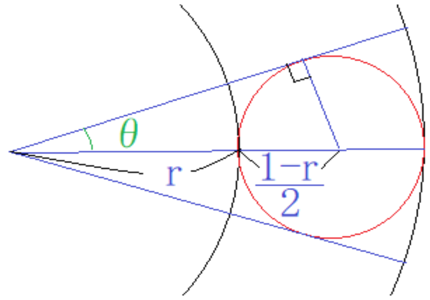
になる点が 1 つだけある。

$$f(a)=\frac{a+2}{a^2+1}=\frac{21}{10}\to21a^2-10a+1=0\to(3a-1)(7a-1)=0\to a=\frac{1}{3},\frac{1}{7}$$

候補が 2 つ出るが指定の閉区間に入るのは(グラフから一目瞭然) $a=\frac{1}{7}$ (答)

【7】2 つの円に挟まれた円の半径は

$$\frac{1-r}{2}$$



で、原点から見てこの円を見込む角を 2θ とすると

$$\sin\theta=\frac{\frac{1-r}{2}}{r+\frac{1-r}{2}}=\frac{1-r}{1+r}\quad(*)$$

この円が最大何個できるかというと、それを k 個とするなら

$$k=\left[\frac{2\pi}{2\theta}\right]=\left[\frac{\pi}{\theta}\right]\Leftrightarrow\frac{\pi}{\theta}\leq k<\frac{\pi}{\theta}+1$$

よって円周の総和は

$$\frac{\pi}{\theta}\times2\pi\cdot\frac{1-r}{2}\leq f(r)<\left(\frac{\pi}{\theta}+1\right)\times2\pi\cdot\frac{1-r}{2}$$

r を θ で表そう。(*) より $\sin\theta(1+r)=1-r\rightarrow(\sin\theta+1)r=1-\sin\theta$ だから

$$r=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},\ 1-r=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\quad,$$

$$\frac{\pi^2}{\theta}\times\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\leq f(r)<\left(\frac{\pi^2}{\theta}+\pi\right)\times\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\quad,$$

$$\frac{2\pi^2}{1+\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\leq f(r)<\frac{2\pi^2}{1+\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{2\pi\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

ここで $r\rightarrow1-0$ なら $\theta\rightarrow+0$ だから

$$\frac{2\pi^2}{1+0}\times1\leq\lim f(r)<\frac{2\pi^2}{1+0}\times1+\frac{2\pi\cdot0}{1+0}\quad,$$

$$\lim f(r)=2\pi^2\quad(\text{答})$$