I【1】ABの長さが $r+2$ だから $a^2+b^2=(r+2)^2$. 内分の公式より $(x,y)=(\frac{ra}{r+2},\frac{2b}{r+2})$.
これから $a=\frac{r+2}{r}x, b=\frac{r+2}{2}y$ (ア)(イ) が出る。これらを第1式に代入して $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4}=1$ (ウ)

【2】2つの方程式を連立して

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(sx+t)^2}{4}=1\to(4+r^2s^2)x^2+2r^2stx+r^2t^2-4r^2=0 \quad (エ)(オ)$$

接するのは判別式が0のときだから

$$r^4s^2t^2-(4+r^2s^2)(r^2t^2-4r^2)=0\to r^2s^2t^2-(4+r^2s^2)(t^2-4)=0 \quad ,$$
$$\to 4t^2-16-4r^2s^2=0\to t^2-r^2s^2=4 \quad (カ)$$

【3】 $l_2: y=u(x-p)+q, l_2: y=-\frac{1}{u}(x-p)+q$ (キ)(ク)
前問の (カ) の答を参照して、前者の直線が接線になるのは

$$(-up+q)^2-r^2u^2=4\to(r^2-p^2)u^2+2pqu+(4-q^2)=0 \quad (ケ)(コ)$$

後者の直線が接線になるのは

$$(\frac{p}{u}+q)^2-r^2(-\frac{1}{u})^2=4\to(4-q^2)u^2-2pqu+(r^2-p^2)=0 \quad (コ)(ケ)$$

上記2式を辺々足して

$$(r^2-p^2+4-q^2)u^2+(4-q^2+r^2-p^2)=0\to(r^2-p^2+4-q^2)(u^2+1)=0$$

だから

$$p^2+q^2=r^2+4 \quad (サ)$$

II【1】 $a'=\frac{a}{d}, b'=\frac{b}{d}$ のように最大公約数で割れば互いに素になるので、 a', b' の最大公約数は1である。(ア)
(1) の両辺を d で割れば $a'x+b'y=l$
$l=1$ のときの特殊解を代入すれば $a'x_0+b'y_0=1$, l 倍して $a'lx_0+b'ly_0=l$
さきの式と辺々引けば

$$a'(x-lx_0)+b'(y-ly_0)=0\to a'(x-lx_0)=-b'(y-ly_0)$$

左辺は b' で割り切れるが係数の a' は割れないので、 $x-lx_0$ は b' の倍数。(イ)
右辺も同様に考えて、 $y-ly_0$ は a' の倍数。(ウ)
上式を $a'b'$ で割って整数 m を使って

$$\frac{x-lx_0}{b'}=\frac{-(y-ly_0)}{a'}=m$$

と書ける。よって、 $x=lx_0+b'm, y=ly_0-a'm$ (エ)(オ)

【2】放物線の式を直線の式に代入して

$$ax+b(-x^2+c)=l\to bx^2-ax+(l-bc)=0$$

の判別式が正。すなわち

$$a^2-4b(l-bc)>0\to c>\frac{-a^2+4bl}{4b^2} \quad (カ)$$

2次方程式を解けば

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b}\quad,$$

$$y=\frac{1}{b}(l-ax)=\frac{1}{b}\cdot\left(l-\frac{a^2\pm a\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b}\right)=\frac{2bl-a^2\mp a\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b^2}\quad\text{(キ)}$$

$x=lx_0+b'm$ が 2 つの共有点の x 座標の間に来ないといけないから

$$\frac{a-\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b}<lx_0+b'm<\frac{a+\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b}$$

いま $d=1$ としていたから $b=b'd=b'$ に注意して

$$\frac{a-\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b^2}-\frac{lx_0}{b}<m<\frac{a+\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b^2}-\frac{lx_0}{b}\quad,$$

$$\frac{a-2blx_0}{2b^2}-\frac{\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b^2}<m<\frac{a-2blx_0}{2b^2}+\frac{\sqrt{a^2-4b(l-bc)}}{2b^2}\quad\text{(キ)(ク)}$$

$a=2,b=3,l=2$ のときの不定方程式 $2x+3y=2$ を実際に解いてみよう。

(2) の不定方程式 $2x_0+3y_0=1$ の特殊解:

$$x_0=2,y_0=-1$$

を求めて、一般解 (エ)(オ) が

$$x=lx_0+b'm=4+3m\quad,$$

$$y=ly_0-a'm=-2-2m$$

ここで $m=-3,-2,-1,0,1$ と変化させると

$A(-5,4)$

$B(-2,2)$

$C(1,0)$

$D(4,-2)$

$E(7,-4)$

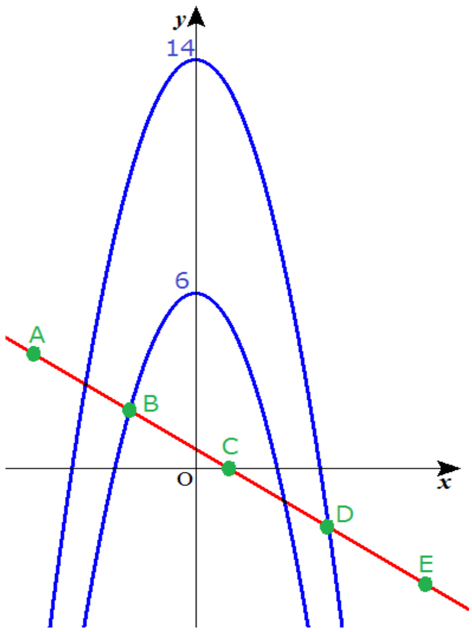
これらの点を放物線 $y=-x^2+c$ が通過するときの $c=x^2+y$ の値を求めると

$$A(c=25+4=29),B(c=4+2=6),C(c=1+0=1),D(c=16-2=14),E(c=49-4=45)$$

$y<-x^2+6$ だと B,C の 2 点が解になるかと思いきや、スレスレで B はダメだ。

$y<-x^2+14$ だと B,C,D の 3 点が解になるかと思いきや、スレスレで D がダメだから、解はちょうど 2 個あることになる。これを過ぎると 3 点が解になってしまう。結局

$$6<c\leq14\quad\text{(ケ)(コ)}$$



III【1】 $f(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$ を微分すると

$$f'(t)=\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\geq 0 \quad (ア)$$

で単調増加が分かるから、値域は $f(0)\leq f(t)\leq f(1)$ ，すなわち $0\leq f(t)\leq 1$ (イ)

また $\sqrt{1-f(t)^2}=\sqrt{1-\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}}=\dfrac{\sqrt{(1+t^2)^2-4t^2}}{1+t^2}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (ウ)

【2】 $\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ (エ)

【3】 $\sin\theta=f(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}, t=0\to 1$ だが、 $\cos\theta=\sqrt{1-f(t)^2}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ に注意すると

だから $\cos\theta\, d\theta=f'(t)dt=\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$ より $d\theta=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{2}+\sin\theta}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}+2t/(1+t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt$$

$$=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{(t+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dt \quad (オ)(カ)(キ)$$

今度は $t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan u, u=\dfrac{\pi}{4}\to\alpha$ と置換する。 $dt=\dfrac{du}{\sqrt{2}\cos^2 u}$ だから

$$I=\int_{\pi/4}^{\alpha}\frac{\sqrt{2}}{(\tan^2 u+1)/2}\cdot\frac{du}{\sqrt{2}\cos^2 u}=\int_{\pi/4}^{\alpha}2\,du=2(\alpha-\frac{\pi}{4}) \quad (ク)$$

もう一方の積分は演算子が＋から－に変わり、積分範囲が変わるので

$$J=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{(t-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/2-\alpha}\frac{\sqrt{2}}{(\tan^2 u+1)/2}\cdot\frac{du}{\sqrt{2}\cos^2 u}=\int_{-\pi/4}^{\pi/2-\alpha}2\,du=2(\frac{3\pi}{4}-\alpha) \quad (ケ)$$

【4】 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\, d\theta$ と置換する。 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_0$ としよう。

$$K(r)=\int_{-r}^{r}\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta/\{(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}\}d\theta$$

$$=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{2-\sin^2\theta}d\theta=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sin\theta)(\sqrt{2}-\sin\theta)}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}(\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta})d\theta=\int_0^{\theta_0}(\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta})d\theta$$

ここで $r\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}-0$ とすれば $\theta_0\to\dfrac{\pi}{2}-0$ だから

$$\lim K(r)=\int_0^{\pi/2-0}(\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta})d\theta=I+J \quad (コ)$$

よって

$$\lim K(r)=2(\alpha-\frac{\pi}{4})+2(\frac{3\pi}{4}-\alpha)=\pi \quad (サ)$$

IV【1】 $\alpha z+\beta$ (ア)

【2】 $z_n=\alpha z_{n-1}+\beta\,,z_0=i$ という漸化式ができる。これより

$$z_n-z_{n-1}=(\alpha z_{n-1}+\beta)-(\alpha z_{n-2}+\beta)=\alpha(z_{n-1}-z_{n-2})$$

だから $w_n=z_n-z_{n-1}$ とおけば、 $w_n=\alpha w_{n-1}$ は等比数列で、初項は

$$w_1=z_1-z_0=(\alpha i+\beta)-i=(\alpha-1)i+\beta$$

よって一般項は

$$w_n=\alpha^{n-1}\{(\alpha-1)i+\beta\}$$

求めるべき数列の一般項は

$$a_n=|\alpha|^{n-1}|(\alpha-1)i+\beta| \quad \text{(イ)}$$

無限等比級数の和は

$$\sum a_n=\frac{|(\alpha-1)i+\beta|}{1-|\alpha|} \quad \text{(ウ)}$$

【3】 $w-\delta=\gamma(z-\delta)$ より $w=\delta+\gamma(z-\delta)$ (エ)

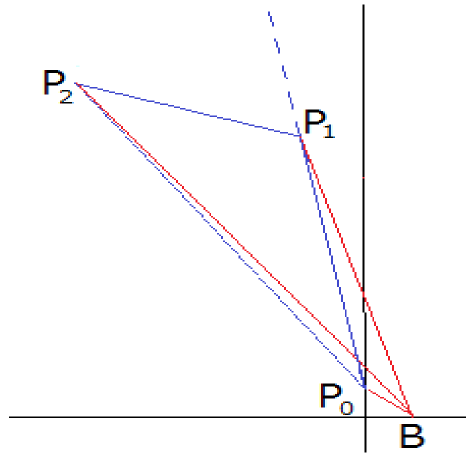
ここで任意の z について $\alpha z+\beta=\delta+\gamma(z-\delta)$,すなわち $(\alpha-\gamma)z+(\beta-\delta+\gamma\delta)=0$ という恒等式が成り立てば未定係数法により

$$\alpha-\gamma=0,\beta-\delta+\gamma\delta=0$$

となる。この連立方程式を解いて

$$\gamma=\alpha\,,\delta=\frac{\beta}{1-\gamma}=\frac{\beta}{1-\alpha} \quad \text{(オカ)}$$

【4】 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta+i\sin\theta)$ でかつ $\frac{\beta}{1-\alpha}=1$ なら $\beta=1-\alpha=1-\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta+i\sin\theta)$



3 点 P_0,P_1,P_2 を表す複素数を求めると

$P_0:z_0=i$,

$P_1:z_1=\alpha z_0+\beta=\alpha i+1-\alpha=\alpha(i-1)+1$,

$P_2:z_2=\alpha z_1+\beta=\alpha\{\alpha(i-1)+1\}+1-\alpha=\alpha^2(i-1)+1$

3 頂点すべてを -1 だけ平行移動すると考えて

$BP_0:i-1$,

$BB:0$,

$BP_2:\alpha^2(i-1)$

辺 BP_2 は辺 BP_0 を $|\alpha|^2$ 倍したもので、なす角は $2\arg\alpha$ になっている。よって $\triangle P_0BP_2$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times|i-1|\times|1-i||\alpha|^2\times\sin(2\arg\alpha)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\times\sin 2\theta=\frac{1}{3}\sin 2\theta \quad \text{(キ)}$$

次に $\triangle P_0P_1P_2$ の面積を求めるには

$P_0P_1:\alpha(i-1)+1-i=(\alpha-1)(i-1)$,

$P_1P_2:\alpha^2(i-1)+1-\{\alpha(i-1)+1\}=\alpha(\alpha-1)(i-1)$

より辺 P_1P_2 と辺 P_0P_1 のなす角(三角形の外角)は $\arg\alpha$ だから、 $\triangle P_0P_1P_2$ の面積は

$$\frac{1}{2}\times|(\alpha-1)(i-1)|\times|\alpha(\alpha-1)(i-1)|\times\sin(\pi-\arg\alpha)=\frac{1}{2}|\alpha||\alpha-1|^2\sqrt{2}^2\sin\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2\right\}\times\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)\times\sin\theta$$

$=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\sin\theta-\dfrac{2}{3}\sin\theta\cos\theta$ (ク)

さいごに $\triangle P_{n-1}P_nP_{n+1}$ の面積を求めるには

$P_{n-1}P_n: z_n-z_{n-1}=w_n=\alpha^{n-1}\{(\alpha-1)i+\beta\}=\alpha^{n-1}(\alpha-1)(i-1)$,

$P_nP_{n+1}: z_{n+1}-z_n=w_{n+1}=\alpha^n\{(\alpha-1)i+\beta\}=\alpha^n(\alpha-1)(i-1)$

より辺 P_nP_{n+1} と辺 $P_{n-1}P_n$ のなす角(三角形の外角)は $arg\,\alpha$ だから、 $\triangle P_{n-1}P_nP_{n+1}$ の面積は

$S_n=\dfrac{1}{2}\times|\alpha|^{2n-1}\times|\alpha-1|^2|i-1|^2\times\sin(\pi-arg\,\alpha)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1}\times\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)\sqrt{2}^2\sin\theta$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}-2\cos\theta\right)\sin\theta$ (ケ)

この三角形を 1 個おきにとって、その面積の無限和を取ると

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_{2n-1}=S_1+S_3+\cdots=S_1\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right\}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-2\cos\theta\right)\sin\theta\times\frac{1}{1-1/9}$

$=\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}-2\cos\theta\right)\sin\theta=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{4}\cos\theta\right)\sin\theta$ (コ)