文教・生活

【1】(1) 与式は　$10^{0.3010}<2<10^{0.3011}$, $10^{0.4771}<3<10^{0.4772}$　と同値である。よって

$$10^{25.2863}<3^{53}<10^{25.2916}\Rightarrow 10^{25}\le 3^{53}<10^{26}$$

より 26 桁の整数。(答)

(2)　$3^{53}=a\times 10^{25}$　とおけば　$1\le 10^{0.2863}<a<10^{0.2916}<10^{0.3010}<2$　より上1桁=a の整数部分=1 (答)
下1桁の方は mod.10 で考えて

$$3\equiv 3\,,\,3^2\equiv 9\,,\,3^3\equiv 7\,,\,3^4\equiv 1$$

で、4 乗ごとのサイクルになる。　$3^{53}=(3^4)^{13}\times 3\equiv 1^{13}\times 3\equiv 3\,(mod.10)$　より下1桁=3 (答)

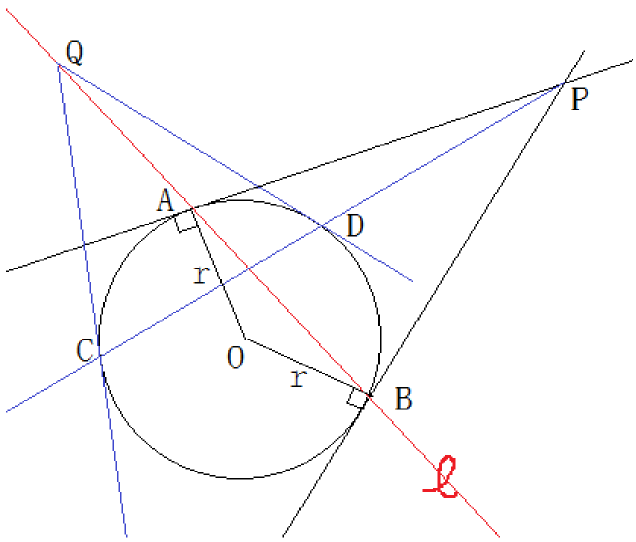
(3)　$10^{25.2863}<3^{53}<10^{25.2916}$　だったが　$10^{25.284}<2^{84}<10^{25.2924}$　だから、最も近い2のベキは　2^{84}　だ。
よって　$m=84$　(答)

【2】(1) 円の接線と半径は垂直だから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{OA}|^2=0\quad ,$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=r^2\quad (答)$$

同様に　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=r^2$　(答)



(2) 直線　l　上の点を　X　とする。
この直線は AB の中点を通り、　$\overrightarrow{OP}$　を法線ベクトルとする(　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ $=0$　から分かる。) 直線の式は

$$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OX}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right)=0\quad ,$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}\right)=0\quad ,$$

$$p_1x+p_2y-r^2=0\quad (答)$$

★この直線を点 P を極とする極線と言う。

(3) 点 Q が 直線　l　上にあるから

$$p_1q_1+p_2q_2-r^2=0\quad (*)$$

一方、点 Q を極とする極線 m (=「2 点 C, D を通る直線」) は

$$q_1x+q_2y-r^2=0$$

であるが、(*) が成り立つので点　$P(p_1, p_2)$　が直線 m 上にあることとなる。■

【3】(1) 数学的帰納法。n=1 のとき自明。

$$|\sin(x+y)|=|\sin x\cos y+\cos x\sin y|\le|\sin x||\cos y|+|\cos x||\sin y|\le|\sin x|+|\sin y|$$

だから、もし

$$|\sin(x_1+\cdots+x_n)|\le|\sin x_1|+\cdots+|\sin x_n|$$

が成り立つならば

$$|\sin(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})|\le|\sin(x_1+\cdots+x_n)|+|\sin x_{n+1}|\le|\sin x_1|+\cdots+|\sin x_n|+|\sin x_{n+1}|$$

も成り立つ。これは n のとき成り立てば n+1 のときにも成り立つことを示しており、帰納法が完成する。■

(2) $x_k=\dfrac{\pi}{2}-y_k$ とおけば $x_1+\cdots+x_n=\dfrac{n}{2}\pi-(y_1+\cdots+y_n)=0$ である。前問の結果を使って

$$|\cos x_1|+\cdots+|\cos x_n|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-y_1\right)\right|+\cdots+\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-y_n\right)\right|=|\sin y_1|+\cdots+|\sin y_n|$$

$$\ge|\sin(y_1+\cdots+y_n)|=\left|\sin\frac{n}{2}\pi\right|=|\pm1|=1 \quad ■$$

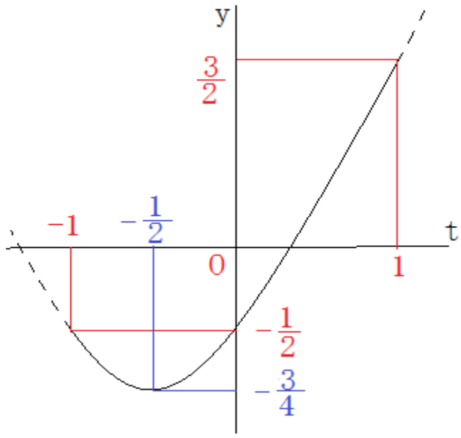
(3) $y=\cos x+\dfrac{1}{2}(2\cos^2 x-1)=\cos^2 x+\cos x-\dfrac{1}{2}=\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$

だから 2 次関数 $y=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}(-1\le t\le1)$ の最大最小問題に帰着する。

最大値は $y=\dfrac{3}{2}$ で $\cos x=1\Leftrightarrow x=2n\pi$ のとき。

最小値は $y=-\dfrac{3}{4}$ で $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\left(2n\pm\dfrac{2}{3}\right)\pi$

のとき。(ただし n は任意の整数)。



数学共通(理)

【1】 文教･生活と同じ。

【2】 文教･生活と同じ。

【3】(1) $e^x=t>0$ とおけば $f(x)=t^3-2t+2=y$,

$\dfrac{dy}{dt}=3t^2-2$ で増減表は右図。

t	0	…	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	…
$\frac{dy}{dt}$		−	0	+
y		↘	$2-\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↗

最小値は $y=2-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}>0$ より $f(x)>0$ ■

(2) $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3e^{3x}-2e^x}{e^{3x}-2e^x+2}=\dfrac{e^x(3e^{2x}-2)}{e^{3x}-2e^x+2}$ より

臨界点は $e^x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2}{3}$ で、この前後で導関数の符号は負から正に変わる。よって極小値は $g(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2}{3})=\log(2-\dfrac{4\sqrt{6}}{9})$

x	…	$\frac{1}{2}\log\frac{2}{3}$	…
g'(x)	−	0	+
g(x)	↘	$\log(2-\frac{4\sqrt{6}}{9})$	↗

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log(e^{3x}-2e^x+2)=\lim\log\{e^x(e^{2x}-2)+2\}=\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\log(e^{3x}-2e^x+2)=\log(0-0+2)=\log 2$.

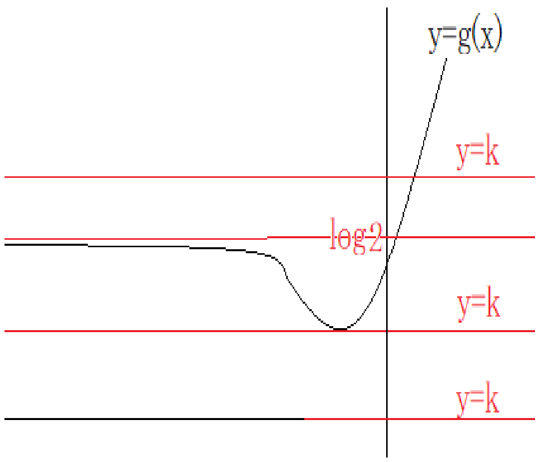
よって

$\log 2\le k$ のとき 1 個、

$\log(2-\dfrac{4\sqrt{6}}{9})<k<\log 2$ のとき 2 個、

$k=\log(2-\dfrac{4\sqrt{6}}{9})$ のとき 1 個、

$k<\log(2-\dfrac{4\sqrt{6}}{9})$ のとき 0 個。(答)



数学専門Ⓐ

【1】(1) n=3 のとき　$2^2>3$　より成り立つ。n のとき成り立つ、すなわち　$2^{n-1}>n$　を仮定する。このとき　$2^n=2\cdot 2^{n-1}>2n=n+n>n+1$　. これは n+1 のときにも成り立つことを示している。■

(2)　$a_1=1, a_2=A\geq 2, a_n=B\geq A$　とする。すなわち　$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(1, A, \cdots, B)$　. 左辺 L は

$$1+(n-2)A+B\leq L\leq 1+A+(n-2)B\quad ,$$

右辺 R は

$$A^{n-2}B\leq R\leq AB^{n-2}\quad .$$

もし、R の下限＞L の上限だと、等式を満たす数は存在できない。それを示そう。実際、

$$D=A^{n-2}B-\{1+A+(n-2)B\}=B\{A^{n-2}-(n-1)\}-1-A+B$$

で、前問より　$2^{n-1}>n(n\geq 3)$　だが　$A\geq 2, n-1\geq 3$　だから、　$A^{n-2}\geq 2^{n-2}>n-1$　である。よって

$$D\geq B\times 1-1-A+B=B-1-A+B\geq (B-1)+(B-A)\geq 1+0>0$$

となる。

次に　$a_1=A\geq 2, a_n=B\geq A$　の場合、すなわち　$(a_1, \cdots, a_n)=(A, \cdots, B)$　のときを考える。

R の下限－L の上限は

$$D=A^{n-1}B-\{A+(n-1)B\}=B(A^{n-1}-n)+B-A\geq B\times 1+(B-A)\geq 2+0>0$$

だから、この場合も等式を満たす数は存在しない。

結局　$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(1, A, \cdots)$　でも　$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(A, \cdots)$　でもダメである。(ただし　$A\geq 2$　)

したがって　$(a_1, a_2, \cdots)=(1, 1, \cdots)$　, すなわち　$a_1=1, a_2=1$　でなければならない。■

(3) 前問より　$a_1=1, a_2=1$　だから

$$2+a_3+a_4+a_5=a_3a_4a_5$$

ア)　$a_3=1$　のとき　$3+a_4+a_5=a_4a_5$　となるから

$$(a_4-1)(a_5-1)=4$$

よって　$(a_4-1, a_5-1)=(1,4), (2,2)$　, すなわち　$(a_4, a_5)=(2,5), (3,3)$

イ)　$a_3=2$　のとき　$4+a_4+a_5=2a_4a_5$　となるから、両辺を 2 倍して整理すれば

$$(2a_4-1)(2a_5-1)=9$$

よって　$(2a_4-1, 2a_5-1)=(3,3)$　, すなわち　$(a_4, a_5)=(2,2)$

ウ)　$a_3\geq 3$　のとき　$k=a_3\geq 3$　とおけば　$2+k+a_4+a_5=ka_4a_5$　. 両辺を k 倍して整理すれば

$$(ka_4-1)(ka_5-1)=k(k+2)+1=(k+1)^2\quad (*)$$

ところが　$a_4, a_5\geq k, k\geq 3$　だから

$$ka_4-1\geq k^2-1=(k-1)(k+1)\geq 2(k+1)\quad ,\quad ka_5-1\geq 2(k+1)\quad .$$

よって　$(ka_4-1)(ka_5-1)\geq 4(k+1)^2$　となり (*) を満たすことができない。

結局、　$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)=(1,1,1,2,5), (1,1,1,3,3), (1,1,2,2,2)$　(答)

【2】(1) $\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$

$$=\frac{\dfrac{\sin a}{\cos a}+\dfrac{\sin b}{\cos b}}{1-\dfrac{\sin a}{\cos a}\cdot\dfrac{\sin b}{\cos b}}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\quad\blacksquare$$

(2) $g(\frac{1}{2})=y_1\Leftrightarrow\tan y_1=\frac{1}{2}$, $g(\frac{1}{3})=y_2\Leftrightarrow\tan y_2=\frac{1}{3}$ とおく。

$$\tan(y_1+y_2)=\frac{\tan y_1+\tan y_2}{1-\tan y_1\tan y_2}=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}}=\frac{5}{5}=1\ \text{より}\ \ y_1+y_2=\frac{\pi}{4}\quad\blacksquare$$

(3) $f'(t)=1-\dfrac{1}{\cos^2 t}+\tan^2 t\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}=\dfrac{\cos^4 t-\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^4 t}=\dfrac{\cos^4 t-2\cos^2 t+1}{\cos^4 t}$

$$=\frac{(\cos t+1)^2(\cos t-1)^2}{\cos^4 t}\geq 0$$ (答)

で単調増加かつ $f(0)=0-0+0=0$ だから、 $0\leq t<\frac{\pi}{2}$ で $f(t)\geq 0$ $\blacksquare$

(4) g が tan の逆関数だから $\tan(g(x))=x$ が常に成り立つ。f に $t=g(\frac{1}{2})$ と $t=g(\frac{1}{3})$ を代入する。

$$f(g(\tfrac{1}{2}))=g(\tfrac{1}{2})-\tan(g(\tfrac{1}{2}))+\tfrac{1}{3}\tan^3(g(\tfrac{1}{2}))=g(\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3\geq 0\ ,$$

$$f(g(\tfrac{1}{3}))=g(\tfrac{1}{3})-\tan(g(\tfrac{1}{3}))+\tfrac{1}{3}\tan^3(g(\tfrac{1}{3}))=g(\tfrac{1}{3})-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3\geq 0$$

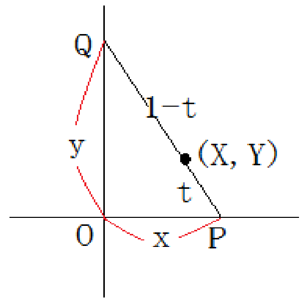
辺々足して

$$g(\tfrac{1}{2})+g(\tfrac{1}{3})\geq\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\{(\tfrac{1}{2})^3+(\tfrac{1}{3})^3\}=\tfrac{5}{6}-\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{35}{6^3}=\tfrac{505}{3\times6^3}$$

先の結果を使って

$$\pi\geq 4\times\frac{505}{3\times6^3}=\frac{505}{162}=3.117\cdots>3.11\quad\blacksquare$$

【3】(1)　$P=(x,0), Q=(0,y), x^2+y^2=1$　とし、軌跡上の点を　(X,Y)



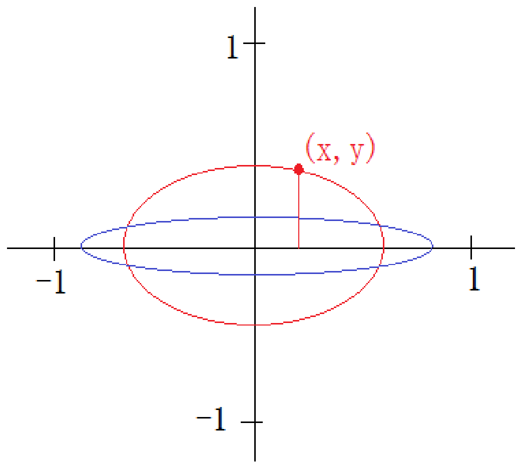
とすれば　$X=(1-t)x, Y=ty$　である。　x, y　を消去すると

$$\left(\frac{X}{1-t}\right)^2+\left(\frac{Y}{t}\right)^2=1$$

変数を置き換えて

$$\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{t^2}=1 \quad (答)$$

(2) 軌跡は上記のようにパラメータ　t　付きの楕円だが、
　x　を固定し、パラメータ　t　を変化させると　y　は
どこからどこまでの範囲を動くかを調べよう。
対称性より第 1 象限だけ調べればよい。
前問の答より



$$y=t\sqrt{1-\frac{x^2}{(1-t)^2}}=\frac{t}{1-t}\sqrt{(1-t)^2-x^2}\quad ,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{(1-t)^2}\sqrt{(1-t)^2-x^2}+\frac{t}{1-t}\cdot\frac{-(1-t)}{\sqrt{(1-t)^2-x^2}}$$

$$=\frac{(1-t)^2-x^2-t(1-t)^2}{(1-t)^2\sqrt{(1-t)^2-x^2}}=\frac{(1-t)^3-x^2}{(1-t)^2\sqrt{(1-t)^2-x^2}}\quad .$$

　t　の変域は、楕円の存在範囲から　$0\le x\le 1-t$　で
書き直すと　$t\le 1-x$　. この範囲で臨界点は

$$(1-t)^3=x^2 \Leftrightarrow 1-t=\sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow t=1-\sqrt[3]{x^2}$$

で、この t の値の前後で y は増加から減少に変わるから、ここが極大点。y の最大値は

$$y=(1-\sqrt[3]{x^2})\sqrt{1-\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4}}}=(1-\sqrt[3]{x^2})^{3/2}\quad ,$$

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1 \quad (答)$$

座標軸に関して対称移動しても式の形は変わらないから、これが答でアステロイド(星芒形)と呼ばれる曲線だ。

(3) 第 1 象限の長さを求めて 4 倍すればよい。

$$l=4\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

境界の式(前問の答)を微分すると

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \to \frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

だから

$$l=4\int_0^1\sqrt{1+\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\,dx=4\int_0^1\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}\,dx=4\int_0^1 x^{-1/3}\,dx=4\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_0^1=6 \quad (答)$$

数学Ⓑ

【1】 数学専門Ⓐと同じ。
【2】 数学専門Ⓐと同じ。