数　　　　学（数学科・物理学科）

第 1 問 （100点）

xy 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = \frac{x^2}{2} \qquad C_2 : \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx$$

について，次の問いに答えよ．ただし，a，b は正の定数とする．

問 1　$a = 6$ とする．C_1 と C_2 は共有点 P をもち，点 P において共通の接線をもつとする．この接線の方程式および定数 b の値を求めよ．

問 2　$a = 2$ とする．C_1 と C_2 に接する傾きが正の直線が存在するような定数 b の値の範囲を求めよ．

数　　学（数学科）

第 2 問（100点）

$x > 0$ に対して，

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$$

とする．

問 1　$0 < x_1 < x_2$ ならば，$0 < f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

問 2　$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

問 3　$g(x)$ の第 2 次導関数 $g''(x)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

数　　学（数学科）

第 3 問（100点）

原点を O とする座標空間において，3 点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3}-1,\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}\left(0,\ 0,\ \sqrt{3}+1\right)$ をとる．四面体 OABC に内接する球面を S とする．次の問いに答えよ．

問 1　S の中心 P の座標を求めよ．

問 2　S と三角形 ABC が接する点 Q の座標を求めよ．

数　　　学（数学科）

第 4 問 （100点）

k を 2 以上の自然数とし，$z=\cos\dfrac{2\pi}{k}+i\sin\dfrac{2\pi}{k}$ とおく．ただし，i は虚数単位とする．次の問いに答えよ．

問 1　m，n を整数とする．$m-n$ が k の倍数であることは，$z^m=z^n$ となるための必要十分条件であることを示せ．

問 2　ℓ を k と互いに素な自然数とする．このとき，複素数 z^{ℓ}，$z^{2\ell}$，$z^{3\ell}$，……，$z^{k\ell}$ はすべて異なることを示せ．

問 3　ℓ を自然数とする．複素数 z^{ℓ}，$z^{2\ell}$，$z^{3\ell}$，……，$z^{k\ell}$ がすべて異なるとき，k と ℓ は互いに素であることを示せ．

数　　　学（数学科）

第 5 問 （100点）

a, b, c, x, y, z を実数とする．次の問いに答えよ．

問 1　$a^2 - b^2 > 0$ のとき，t についての 2 次方程式 $(at + x)^2 - (bt + y)^2 = 0$ は，実数解をもつことを示せ．

問 2　$a^2 - b^2 > 0$ のとき，$(ax - by)^2 \geqq (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$ が成り立つことを示せ．

問 3　$a^2 - b^2 - c^2 > 0$ のとき，$(ax - by - cz)^2 \geqq (a^2 - b^2 - c^2)(x^2 - y^2 - z^2)$ が成り立つことを示せ．