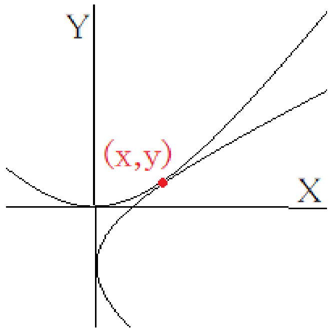
【第 1 問】(問 1) 共有点の座標を $P(x, y)$ とする。2 つのグラフ上にあるから



$$y=\frac{x^2}{2} \quad \cdots ①$$

$$(y+3)^2=2bx \quad \cdots ②$$

また、共通接線だから両関数の微分係数が等しいから

$y'=x$, $2(y+3)y'=2b$ より

$$x(y+3)=b \quad \cdots ③$$

③× 2 x より $2x^2(y+3)=(y+3)^2$ で、これに ①を代入して $4y(y+3)=(y+3)^2$. よって

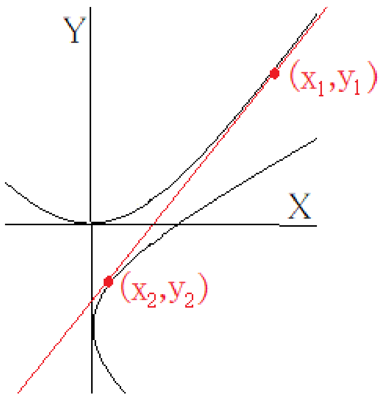
$$3y^2+6y-9=0 \to (y-1)(y+3)=0 \to y=1,-3$$

後者は①よりありえない。それと③を合わせれば x>0 が出てくるから、①より $P(x, y)=(\sqrt{2}, 1)$

接線の方程式は

$$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \quad \text{(答)}$$

b の値は③より、 $b=4\sqrt{2}$ (答)



(問 2) 共通接線を $y=mx+n, m>0$ とおく。この直線と C_1 の共有点を (x_1, y_1) とすれば

$$y_1=\frac{x_1^2}{2} \quad , \quad y_1=mx_1+n \quad , \quad x_1=m$$

だから、 $n=y_1-mx_1=\frac{x_1^2}{2}-mx_1=-\frac{m^2}{2}$

直線と C_2 の共有点を (x_2, y_2) とすれば

$$(y_2+1)^2=2bx_2 \quad , \quad y_2=mx_2+n \quad , \quad 2(y_2+1)m=2b$$

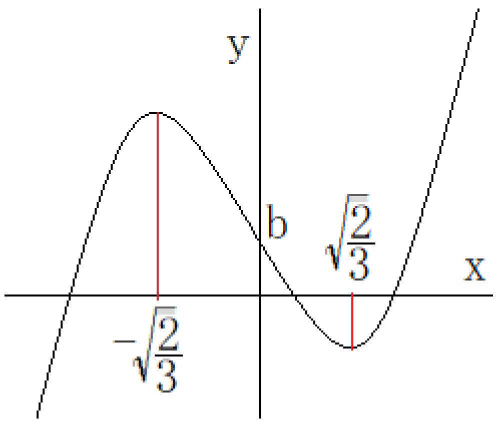
である。第 2 式からの $x_2=\frac{1}{m}(y_2-n)=\frac{1}{m}(y_2+\frac{m^2}{2})$ と、第 3 式からの $y_2+1=\frac{b}{m}$ を第 1 式に代入して

$$\left(\frac{b}{m}\right)^2=\frac{2b}{m}\left(y_2+\frac{m^2}{2}\right)=\frac{2b}{m}\left(\frac{b}{m}-1+\frac{m^2}{2}\right) \quad ,$$

$$b^2=2b\left(b-m+\frac{m^3}{2}\right) \quad ,$$

$$m^3-2m+b=0$$

左辺を f (m) とおこう。f (0)=b >0 だから、傾き m が正の直線が存在するには m>0 において最小値 f (m) ≦0 となればよい。



$$f'(m)=3m^2-2=3\left(m-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(m+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

より

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-2\sqrt{\frac{2}{3}}+b=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+b \le 0 \quad ,$$

$$b \le \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{9} \quad \text{(答)}$$

【第 2 問】(問 1)　$0<t\leq x_2$　において　$0<\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$　だから　$0=\int_0^{x_1}0\,dt<\int_0^{x_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$　, よって

$f(x_1)>0$　. 同様に　$0=\int_{x_1}^{x_2}0\,dt<\int_{x_1}^{x_2}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$　だから

$$\int_0^{x_2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt=\int_0^{x_1}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt+\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt>\int_0^{x_1}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt+0$$

よって　$f(x_2)>f(x_1)$　■

【蛇足】　$x_1\neq x_2\rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$　だから関数　$f(x)$　は開区間　$(0,\infty)$　からその値域への 1 対 1 の写像となり、逆関数を持つ。

(問 2) 逆関数だから　$f(g(x))=x$　となることに注意して、与式の　x　を　$g(x)$　に置き換えると

$$x=f(g(x))=\int_0^{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$$

これを　x　で微分すると

$$1=\frac{d}{dx}\int_0^{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt=\frac{1}{\sqrt{1+g(x)^3}}\times g'(x)$$

よって　$g'(x)=\sqrt{1+g(x)^3}$　(答)

(問 3) 前問の答を微分して

$$g''(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+g(x)^3}}\times 3\,g(x)^2\,g'(x)=\frac{3\,g(x)^2\,g'(x)}{2\,g'(x)}=\frac{3}{2}g(x)^2$$　(答)

【第 3 問】(問 1)　右図は真上から見た平面図である。中心から各座標平面までの距離は 3 つとも半径 r に等しい。だから中心の座標は

$$P(r,r,r)$$

とおける。そしてこの点から平面 ABC までの距離も r に等しい。ところで平面 ABC の方程式は

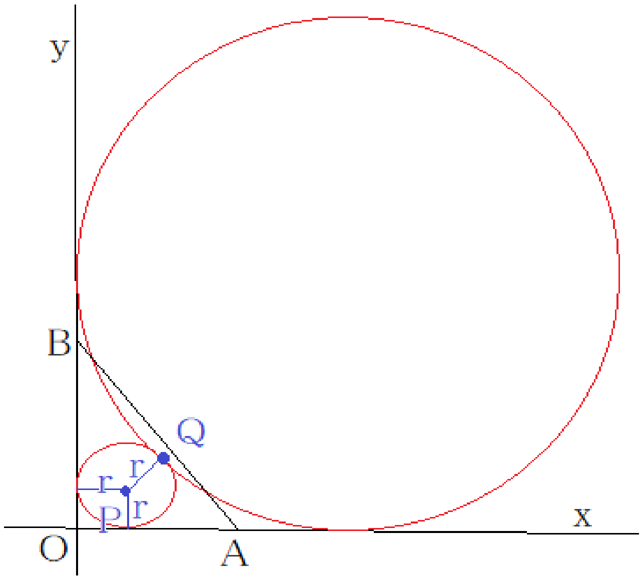
$$\frac{x}{\sqrt{3}-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{\sqrt{3}+1}=1$$

(ヘッセの標準形という)、すなわち

$$(\sqrt{3}+1)x+y+(\sqrt{3}-1)z=2$$

である。点 P からこの平面までの距離は

$$\frac{|(\sqrt{3}+1)r+r+(\sqrt{3}-1)r-2|}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+1^2+(\sqrt{3}-1)^2}}=r$$



分母を払って

$$(2\sqrt{3}+1)r-2=\pm 3r$$

これから　$r=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1},\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$　と 2 つの解が出るが、大きい方の解は球が平面 ABC に原点の反対側から接する場合である。（上図の大きい赤円に対応。）我々が採用すべき解は後者である。

$$r=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3},\ P=(2-\sqrt{3},2-\sqrt{3},2-\sqrt{3})\quad \text{(答)}$$

(問 2) 点 P (球の中心) から平面 ABC に下した垂線(法線) の方程式は

$$(x,y,z)=(r,r,r)+t(\sqrt{3}+1,1,\sqrt{3}-1)$$

点 Q はこの直線上にあり、 $\vec{PQ}=(x,y,z)-(r,r,r)=t(\sqrt{3}+1,1,\sqrt{3}-1)$　の長さが r に等しいから

$$t|(\sqrt{3}+1,1,\sqrt{3}-1)|=r\rightarrow t\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+1^2+(\sqrt{3}-1)^2}=r\rightarrow t=\frac{r}{3}$$

よって点 Q の座標は

$$(x,y,z)=(r,r,r)+\frac{r}{3}(\sqrt{3}+1,1,\sqrt{3}-1)=\frac{r}{3}(\sqrt{3}+4,4,\sqrt{3}+2)$$

$$=\frac{1}{3}(5-2\sqrt{3},8-4\sqrt{3},1)\quad \text{(答)}$$

【第4問】(問1)　$m-n=kt$　(t は整数) であるとすると

$$z^m=z^{n+kt}=z^n\cdot(z^k)^t=z^n(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)^t=z^n\cdot 1^t=z^n$$

逆に　$z^m=z^n$　ならば　$\dfrac{z^m}{z^n}=z^{m-n}=\cos(m-n)\dfrac{2\pi}{k}+i\sin(m-n)\dfrac{2\pi}{k}=1$　である。複素数が 1 に等しいから偏角は 2 π の整数倍である。すなわち

$$(m-n)\frac{2\pi}{k}=2\pi t \quad \text{(t は整数)}$$

だから　$m-n=kt$　となり、k の倍数となる。■

(問2) 背理法。　$z^{ml}=z^{nl}, 1\le n<m\le k$　とする。前問で示したように　$ml-nl=(m-n)l=kt$　となる。　$(m-n)l$　は　k　で割り切れるが、　l　は　k　と互いに素だから　$m-n$　が　k　で割り切れる。ところが　$0<m-n<k$　であったからこれは不可能である。■

(問3) 背理法。　k, l　が互いに素でないとし、最大公約数を d >1 とすれば　$k=k'd, l=l'd$　とおける。ただし　k', l'　は互いに素である。
このとき　z^l　と等しいものが存在する。それは最小公倍数、すなわち　$k'l'd$　だけずらしたものと等しくなる。それを示そう。その複素数の指数は

$$l+k'l'd=l+k'l=(1+k')l$$

で　$1\le k'=\dfrac{k}{d}<k$　だから　$2l\le(1+k')l\le kl$　であるが、それの累乗は

$$z^{(1+k')l}=z^{l+k'l'd}=z^{l+kl'}$$

であって、　z^l　の指数との差は　$(l+kl')-l=kl'$　で k の倍数だから　$z^l=z^{(1+k')l}$　■
【蛇足】(問3)の証明法は例えば　$k=6, l=4$　などという具体例を考えると思いつく。

【第 5 問】(問 1) 因数分解すれば

$$(at+x+bt+y)(at+x-bt-y)=\{(a+b)t+x+y\}\{(a-b)t+x-y\}=0$$

t の係数の　$a+b, a-b$　はいずれも　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2>0$　より 0 でないから実数解を 2 つ（重解の場合を含む）持つ。■

(問 2) 前問の 2 次方程式を書き直すと

$$(a^2-b^2)t^2+2(ax-by)t+(x^2-y^2)=0$$

であり、これが実数解を持つから判別式は正または 0 である。すなわち

$$\frac{D}{4}=(ax-by)^2-(a^2-b^2)(x^2-y^2)\geq 0 \quad ■$$

(問 3) 与えられた不等式の代わりに

$$(ax-by+cz)^2\geq(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$$

を証明してもよい。 c　を　$-c$　で置き換えれば目的の不等式が出てくるからだ。
さて　$x^2-y^2\leq 0$　のときは不等式の右辺≦0 で自明なので、 $x^2-y^2>0$　として証明する。
まず　$a^2-b^2>c^2\geq 0$　に注意すれば、前問より　$(ax-by)^2\geq(a^2-b^2)(x^2-y^2)$　よって

(ア)　$ax-by\geq\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}$　、または(イ)　$ax-by\leq-\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}$

(ア) 前者なら

$$ax-by-cz\geq\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}-cz \quad (*)$$

ここで右辺≧0 ならそのままで

$$(ax-by-cz)^2\geq(\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}-cz)^2$$
$$\geq(\sqrt{a^2-b^2}^2-c^2)(\sqrt{x^2-y^2}^2-z^2)=(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$$

となってよし。右辺＜0 なら　$2cz>0$　を(*) の両辺に足して

$$(ax-by+cz)^2\geq(\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}+cz)^2$$
$$=\{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}-(-cz)\}^2\geq\{\sqrt{a^2-b^2}^2-(-c)^2\}(\sqrt{x^2-y^2}^2-z^2)=(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$$

でよし。

(イ) 後者なら

$$-ax+by+cz\geq\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}+cz \quad (**)$$

ここで右辺≧0 なら

$$(ax-by-cz)^2\geq\{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}-(-c)z\}^2$$
$$\geq(\sqrt{a^2-b^2}^2-c^2)(\sqrt{x^2-y^2}^2-z^2)=(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$$

となってよし。右辺＜0 なら　$-2cz>0$　を(**) の両辺に足して

$$(ax-by+cz)^2\geq(\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{x^2-y^2}-cz)^2$$
$$=(\sqrt{a^2-b^2}^2-c^2)(\sqrt{x^2-y^2}^2-z^2)=(a^2-b^2-c^2)(x^2-y^2-z^2)$$

でよし。■