

1 関数

$$f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geq 0)$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の最大値を求めよ。
- (2)  $f(x)$  とその導関数の極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ。ただし、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることを用いてもよい。

- (3)  $y = f(x)$  のグラフの概形をかけ。ただし、グラフの凹凸を調べる必要はない。

(配点率 20 %)

- 2 1 個のさいころを  $n$  回投げて、 $k$  回目に出た目が 1 の場合は  $X_k = 1$ 、  
出た目が 2 の場合は  $X_k = -1$ 、その他の目が出た場合は  $X_k = 0$  とする。

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき、 $Y_1$  から  $Y_n$  までの積  $Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_n$  を  $Z_n$  で表す。ただし、 $i$  は虚数  
単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $Z_2$  が実数でない確率を求めよ。
- (2)  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$  がいずれも実数でない確率を求めよ。
- (3)  $Z_n$  が実数となる確率を  $p_n$  とする。  $p_n$  を  $n$  を用いて表し、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  を  
求めよ。

(配点率 20 %)

- 3  $n$  を 2 以上の自然数とする. 三角形 ABC において, 辺 AB の長さを  $c$ , 辺 CA の長さを  $b$  で表す.  $\angle ACB = n\angle ABC$  であるとき,  $c < nb$  を示せ.

(配点率 20 %)

- 4  $t$  を正の実数とする.  $xy$  平面において, 連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad xy \leq 1, \quad x + y \leq t$$

の表す領域の面積を  $S(t)$  とおく. 極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) - 2 \log t)$  を求めよ.

(配点率 20 %)

5 3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において, 辺 BC の長さを  $a$ , 辺 CA の長さを  $b$  で表す. 三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を  $V$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $a$  の値を固定して  $b$  の値を変化させるとき,  $V$  が最大になるのは, 三角形 ABC が 辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである. これを示せ.
- (2)  $a, b$  の値をともに変化させるとき,  $V$  の最大値と, 最大値を与える  $a, b$  の値をそれぞれ求めよ.

(配点率 20 %)