【第 1 問】(1) 対数微分法を使って

$$\log f(x)=\frac{\log(x+1)}{x+1} \to \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$$

よって

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}=(x+1)^{1/(x+1)}\cdot\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}=(x+1)^{1/(x+1)-2}\cdot\{1-\log(x+1)\}$$

臨界点は $\log(x+1)=1 \to x=e-1$ だから増減表は右表のとおり。

x	0	…	e−1	…	1
f'	1	+	0	−	
f	1	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘	0

最大値は $f(e-1)=e^{1/e}$ （答）

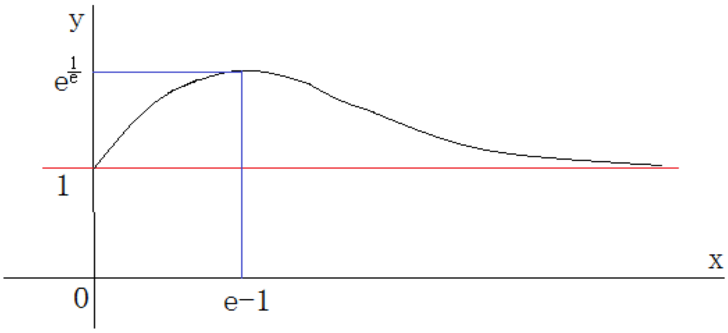
(2) $x\to\infty$ のとき

$$\log f(x)=\frac{\log(x+1)}{x+1}\to 0 \quad ,$$

$f(x)\to e^0=1$ （答）

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}=f(x)\cdot\{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{\log(x+1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}\}\to 1\times(0-0\times 0)=0$$ （答）

(3) $x\to\infty$ のとき $y=1$ が漸近線になることに注意。なお、点 $(0,1)$ における接線の傾きは $f'(0)=1$ である。



【第 2 問】(1) 複素数の積の偏角は、偏角の和だから

$$Z_2=Y_1Y_2=\cos\frac{\pi}{3}(X_1+X_2)+i\sin\frac{\pi}{3}(X_1+X_2)$$

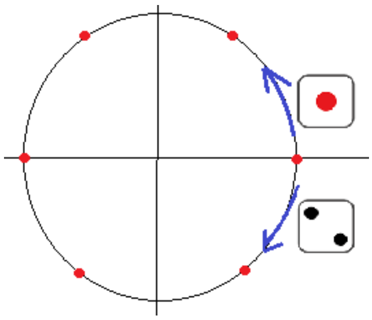
これが実数になるのは　X_1+X_2　が 3 の倍数のときだ。

ア) 1,2 以外の目しか出ない　　$\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{16}{36}$

イ) 1,2 が 1 回ずつ出る　　${}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{36}$

求めるべきはこれの余事象の確率だから、　$1-\left(\frac{16}{36}+\frac{2}{36}\right)=\frac{1}{2}$　(答)

(2)　$Y_1, Y_1Y_2, Y_1Y_2Y_3, \cdots, Y_1Y_2\cdots Y_n$　がすべて実数でないということは、初回に上半平面か下半平面に入ったらそのまま最終回までその平面に留まるということである。



ア) 初回に上半平面か下半平面に入る確率　$\frac{2}{6}$

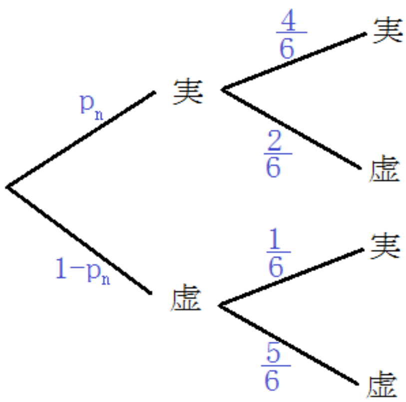
イ) k 回目に右図の赤点が同じ位置に留まるか、虚軸に関して対称移動する確率　$\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

よって、冒頭　n　個の　Z_n　がいずれも実数でない確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\quad(答)$$

(ちなみにこの答は　$n=1$　のときにも正しい。)

(3)　Z_n　がどうなるかは 1 回前の状態に依存する。　p_n　が分っていたとして、樹形図を描けば右図の通り。



ア)　n　回目に赤点が実軸にいたら、そこに留まる

$$p_n\times\frac{4}{6}$$

イ)　n　回目に赤点が上(下)半平面にいたら、近い方の実軸上の点(1 か −1) に乗り移る

$$(1-p_n)\times\frac{1}{6}$$

これらを合わせて　$p_{n+1}=\frac{4}{6}p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{6}$

数列　$\{p_n\}$　の極限値を p とすれば　$p=\frac{1}{2}p+\frac{1}{6}\to p=\frac{1}{3}$　だから、これを両辺から引いて

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)\to p_n-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{3}\right)$$

ところで初回の留まる確率は　$p_1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$　だから、　$p_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$　(答)

極限値は

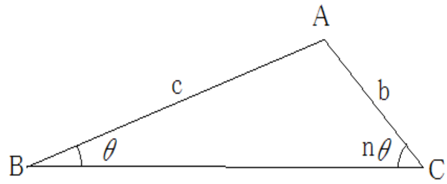
$$\lim p_n=\lim\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\quad(答)$$

【第 3 問】∠ABC= θ とおいて、正弦定理より

$$\frac{c}{\sin n\theta}=\frac{b}{\sin\theta} \quad \text{すなわち} \quad c=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cdot b$$

ここで $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}<n$ が言えれば証明は終わる。

これを数学的帰納法で証明しよう。



I) $n=2$ のとき $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}<2$ を示せばよい。変形すれば $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}<2$ で、常に $\cos\theta<1$ だから成り立つ。

II) $n=k$ のとき成り立つと仮定して $n=k+1$ のとき成り立つこと、すなわち $\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}<k$ を仮定して $\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}<k+1$ を示す。

$$\begin{aligned}
&\sin(k+1)\theta-(k+1)\sin\theta=\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta-(k+1)\sin\theta\\
&<k\sin\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta-(k+1)\sin\theta\\
&=\sin\theta(k\cos\theta+\cos k\theta-k-1)\\
&=\sin\theta\{k(\cos\theta-1)+(\cos k\theta-k)\}
\end{aligned}$$

ここで $\cos\theta<1, \cos k\theta<1<k$ より $\cos\theta-1<0, \cos k\theta-k<0$ だから、上記最終辺は

$$<\sin\theta\{k\times 0+0\}=0$$

で、証明できた。■

【第 4 問】双曲線と斜めの直線の交点の x 座標は

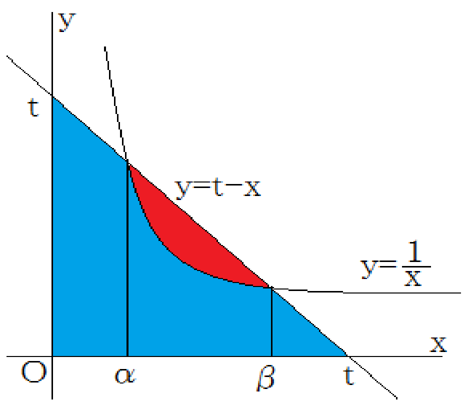
$$xy=1, x+y=t \to x(t-x)=1 \to x^2-tx+1=0$$

より

$$x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

この 2 つの解を α, β とすれば

$$\alpha+\beta=t, \beta-\alpha=\sqrt{t^2-4}, \frac{\beta}{\alpha}=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}}=\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}$$



である。面積は

$$\begin{aligned}
S(t)&=\frac{1}{2}t\times t-\int_\alpha^\beta\left(t-x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{t^2}{2}-\left[tx-\frac{1}{2}x^2-\log x\right]_\alpha^\beta\\
&=\frac{t^2}{2}-t(\beta-\alpha)+\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\log\frac{\beta}{\alpha}\\
&=\frac{t^2}{2}-t\sqrt{t^2-4}+\frac{t\sqrt{t^2-4}}{2}+\log\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}=\frac{t^2}{2}-\frac{t\sqrt{t^2-4}}{2}+\log\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}\\
&=\frac{t}{2}(t-\sqrt{t^2-4})+\log\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
S(t)-2\log t&=\frac{t}{2}(t-\sqrt{t^2-4})+\log(t^2-2+t\sqrt{t^2-4})-\log 2-2\log t\\
&=\frac{t}{2}\cdot\frac{4}{t+\sqrt{t^2-4}}+\log\left(1-\frac{2}{t^2}+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)-\log 2
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}+\log\left(1-\frac{2}{t^2}+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)-\log 2$$

最後に極限をとって

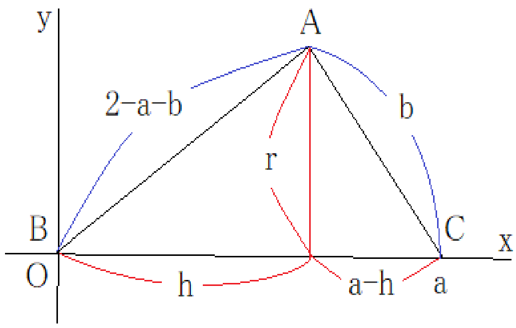
$$\lim\left(S(t)-2\log t\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}+\log\left(1-0+\sqrt{1-0}\right)-\log 2=\frac{1}{2}\times 2+\log 2-\log 2=1 \quad (答)$$

【第5問】(1) 図のように、点Bを原点に、直線BCをx軸に設定する。△ABCを二様に表現する。まずヘロンの公式で

$$S^2=1\cdot(1-a)(1-b)\{1-(2-a-b)\}$$

底辺×高さ÷2だと、頂点Aから対辺に下した垂線の長さをrとすれば

$$S^2=\left(\frac{ar}{2}\right)^2$$



この2つを等しいとおいて

$$r^2=\frac{4}{a^2}(a-1)(b-1)(a+b-1)$$

回転体は円錐2つで、合体した(中をくり抜いた)立体の体積は

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h+\frac{1}{3}\pi r^2(a-h)=\frac{1}{3}\pi r^2 a=\frac{4\pi}{3a}(a-1)(b-1)(a+b-1)$$

(注意:hの変域は $0<h<a$ に限らない。)

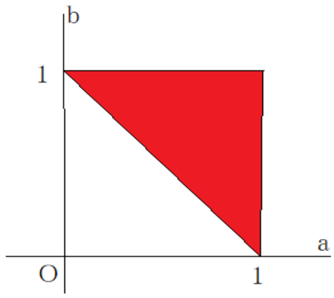
さて、aを固定し、bで微分しよう。

$$\frac{d}{db}V=\frac{d}{db}\frac{4\pi}{3a}(a-1)\{b^2+(a-2)b-(a-1)\}=\frac{4\pi}{3a}(a-1)(2b+a-2)$$

臨界点は $2b+a-2=0 \Leftrightarrow b=2-a-b$ らしいとは予想できるが、変数の変域を丁寧に調べなくてはならない。 $0<a, b, 2-a-b<2$ は当然として、1辺の長さは他の2辺の和より短いから

$$a<2-a,\ b<2-b,\ 2-a-b<a+b$$

合わせれば、 $0<a, b<1, a+b>1$ (右図赤色部)



これからa固定の場合の定義域は

$$1-a<b<1$$

となり、増減表は下のようになる。

b	1−a	…	$\frac{2-a}{2}$	…	1
$\frac{dV}{db}$		+	0	−	
V	0	↗	$\frac{\pi}{3}a(1-a)$	↘	0

よって臨界点は定義域内の点と分かるから、最大になるのは二等辺三角形のときである。■

(2) 点(a, b)が赤色部の内部を動くときのVの最大値を求めよう。aを固定してbだけ変化させたときの最大値は増減表から $V=\frac{\pi}{3}a(1-a)=-\frac{\pi}{3}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots$ である。よって最大値を与える点と最大値は

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{2-a}{2}=\frac{3}{4},\ V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{12} \quad (答)$$