

数 学 (数学 I・数学 II・数学 III・数学 A・数学 B)

1

x と y をそれぞれ自然数とする。袋 A には白玉 2 個, 赤玉 3 個, 袋 B には白玉 x 個, 赤玉 y 個が入っている。袋 A から 1 個の玉を取り出して袋 B に入れ, よくかき混ぜて袋 B から 1 個の玉を取り出して袋 A に入れる。このとき袋 A の白玉の個数がはじめと変わらない確率を p とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = 10, y = 23$ のとき p を求めよ。
- (2) (1) で求めた p を与える x, y の組で $1 \leq x \leq 1000, 1 \leq y \leq 1000$ となるものが何組あるかを求めよ。

2

0 でない複素数 α は $|\alpha - i| = 1$ を満たすとする。また α の偏角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $|\alpha|$ を θ を用いて表せ。
- (2) $\beta = -\alpha + 2i$ とおく。 β の偏角 $\arg \beta$ を θ を用いて表せ。ただし $0 \leq \arg \beta < 2\pi$ とする。
- (3) β は (2) で与えられたものとする。複素数平面において実軸上に点 $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとる。3 点 $A(\alpha), B(\beta), P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が一直線上にあるとき θ の値を求めよ。

3

xyz 空間における $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$, $E(1,0,1)$, $F(1,1,1)$, $G(0,1,1)$ を頂点とする立方体を考える。点 P は時刻 $t=0$ に原点 O を出発し毎秒 1 の速さで正方形 $OABC$ の周上を点 O , 点 A , 点 B , 点 C の順に一周する。点 Q は時刻 $t=0$ に点 D を出発し毎秒 1 の速さで正方形 $DEFG$ の周上を点 D , 点 G , 点 F , 点 E の順に一周する。線分 PQ が通過してできる図形と正方形 $OABC$, 正方形 $DEFG$ によって囲まれる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a は $0 \leq a < \frac{1}{2}$ を満たすとする。平面 $z = a$ によって立体 K を切ったときの切り口の面積を求めよ。
- (2) 立体 K の体積を求めよ。

4

a を正の数とする。 xy 平面において、点 $A(a,0)$ をとり、 C_1 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ とし、 C_2 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が C_1 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。
- (2) 点 P が C_2 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。
- (3) 点 P が C_1 または C_2 上にあるとする。このとき点 $(2,0)$ が、 AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲を求めよ。