【1】(1) 白が出て白が入るか、または赤が出て赤が入るか、だから

$$\frac{2}{5}\times\frac{x+1}{x+y+1}+\frac{3}{5}\times\frac{y+1}{x+y+1}=\frac{2x+3y+5}{5(x+y+1)}$$

よって　$p=\frac{20+69+5}{5(10+23+1)}=\frac{47}{85}$　(答)

(2)　$\frac{2x+3y+5}{5(x+y+1)}=\frac{47}{85}\to 17(2x+3y+5)=47(x+y+1)$　より

$$13x-4y=38$$

なる不定方程式を解けばよい。まず特殊解を求める。　$13\times1-4\times3=1$　を 38 倍して

$$13\times38-4\times114=38$$

これと元の方程式を辺々引いて

$$13(x-38)-4(y-114)=0\to 13(x-38)=4(y-114)=13\times4k$$

から

$$x=4k+38,\ y=13k+114$$

したがって解の個数は、連立不等式:　$1\le 4k+38\le 1000,\ 1\le 13k+114\le 1000$　の解の個数である。　$max(\frac{-37}{4},-\frac{114}{13})=-8$　,　$min(\frac{962}{4},\frac{886}{13})=68$　だから　$68-(-8)+1=77$　組(答)

【2】(1)　$|\alpha-i|^2=(\alpha-i)(\bar{\alpha}+i)=|\alpha|^2+i\alpha-i\bar{\alpha}+1=1\to|\alpha|^2=-i(\alpha-\bar{\alpha})$

ここで　$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　とおけば

$$r^2=-i(i2r\sin\theta)=2r\sin\theta\to|\alpha|=r=2\sin\theta$$　(答)

(2)　$\beta=-\alpha+2i=-2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)+2i=-2\sin\theta\cos\theta+i(-2\sin^2\theta+2)$

$$=-2\sin\theta\cos\theta+i2\cos^2\theta$$

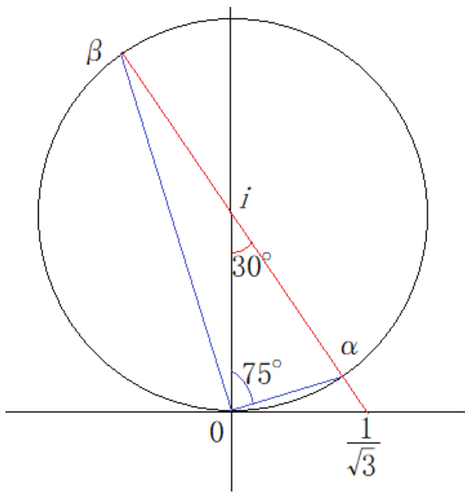
偏角のタンジェントは

$$\tan(arg\,\beta)=\frac{2\cos^2\theta}{-2\sin\theta\cos\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}=-\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan(\pi-(\frac{\pi}{2}-\theta))=\tan(\theta+\frac{\pi}{2})$$

だから、　$arg\,\beta=\theta+\frac{\pi}{2}$　(答)

(3) 問題文本文より　α　は中心　i　, 半径 1 の右半円周上にあると分かる。(2) より　$\frac{\alpha+\beta}{2}=i$　だから　α,β　を結ぶ線分の中点が円の中心になり、この線分は円の直径だ。よって円周角は 90°になったのだ。(前問の答)

α,β　を結ぶ直線が　$\frac{1}{\sqrt{3}}$　を通るから、右図のように　$1:2:\sqrt{3}$　の直角三角形ができて、　α　の偏角は 15°, すなわち　$\theta=\frac{\pi}{12}$　(答)



【3】(1) t= 0 ～1 (秒) のときの線分 PQ 上にあって標高 a の点 R_t の座標を求めてみよう。

$$P=(t,0,0),Q=(0,t,0),R_t=(1-a)P+aQ=((1-a)t,at,0)$$

点 R_t の軌跡の方程式は $(x,y,z)=((1-a)t,at,0)=t(1-a,a,0)$ と t の 1 次式になるから、R_t は直線上を動く。t= 1～2 , t= 2 ～3, t= 3 ～5 のときも同様で、ジャスト秒で曲がる折線上を動く。その様子を図にしよう。ジャスト秒の各点の座標を求める。

$$t=0,P=O=(0,0,0),Q=D=(0,0,1),R=(0,0,a)\ ,$$

$$t=1,P=A=(1,0,0),Q=G=(0,1,1),R_t=(1-a,a,a)\ ,$$

$$t=2,P=B=(1,1,0),Q=D=F=(1,1,1),R_t=(1,1,a)\ ,$$

$$t=3,P=C=(0,1,0),Q=E=(1,0,1),R_t=(a,1-a,a)\ ,$$

$$t=4,P=O=(0,0,0),Q=D=(0,0,1),R_t=(0,0,a)$$

これをもとに地形図(真上から見た平面図)を描く。
等高線による切り口は右図水色部分である。その面積は正方形から緑三角形 4 個を引けばよい。

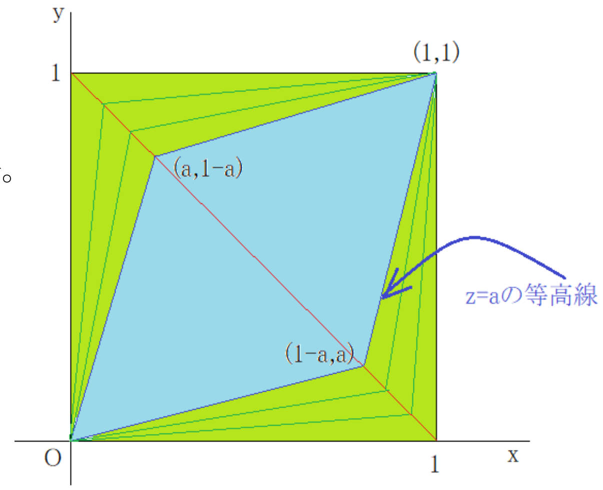
$$S(a)=1-4\times(\frac{1}{2}\times1\times a)=1-2a\quad(答)$$

(2) S(a) を a= 0 ～ 1/2 の間で積分すると

$$\frac{V}{2}=\int_0^{1/2}(1-2a)da=[a-a^2]_0^{1/2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

上下対称でこれと同じ立体が上半にもあるから 2 倍。

$$V=\frac{1}{2}\quad(答)$$

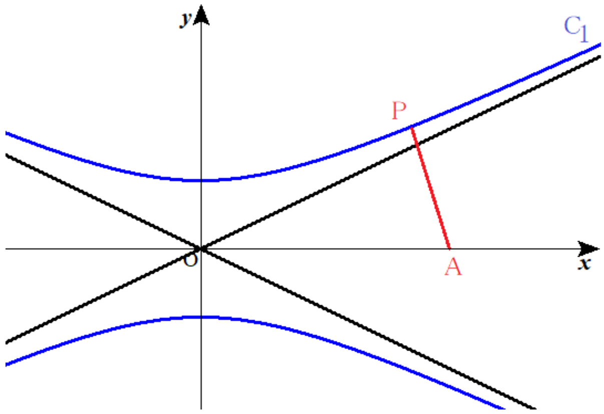


【4】(1)　$AP_1{}^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+\frac{1}{4}(x^2+4)=\frac{5}{4}x^2-2ax+a^2+1=\frac{5}{4}\left(x-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2+1$

x の変域は　$-\infty<x<\infty$　だから放物線の頂点で最小になる。

　$P_1=(x,y)=\left(\frac{4}{5}a, \pm\frac{\sqrt{4a^2+25}}{5}\right)$　のとき

最小値　$AP_1=\sqrt{\frac{1}{5}a^2+1}$　(答)



(2) 点 A は y 軸より右にあるため、点 P_2 は双曲線の右の分枝にあると考えて構わない。

　$AP_2{}^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+\frac{1}{4}(x^2-4)=\frac{5}{4}x^2-2ax+a^2-1=\frac{5}{4}\left(x-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2-1$

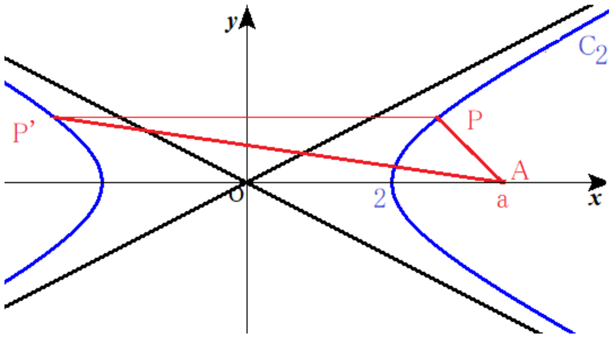
ここで x の変域は　$2\leq x<\infty$　だから、

2 と　$\frac{4}{5}a$　との大小で場合分けとなる。

ア)　$a\geq\frac{5}{2}$　の場合

　$P_2=(x,y)=\left(\frac{4}{5}a, \pm\frac{\sqrt{4a^2-25}}{5}\right)$　のとき

最小値　$AP_2=\sqrt{\frac{1}{5}a^2-1}$　(答)



イ)　$0<a<\frac{5}{2}$　の場合

　$P_2=(x,y)=(2,0)$　のとき最小値　$AP_2=|a-2|$　(答)

(3) 前問の場合分けを踏襲。

ア)　$a\geq\frac{5}{2}$　の場合

点 P が　C_1　上なら　$AP_1=\sqrt{\frac{1}{5}a^2+1}$　,　C_2　上なら　$AP_2=\sqrt{\frac{1}{5}a^2-1}$　で　$AP_1>AP_2$　(遠・近)

よって　$P_2=\left(\frac{4}{5}a, \pm\frac{\sqrt{4a^2-25}}{5}\right)=(2,0)\rightarrow a=\frac{5}{2}$　.　$a=\frac{5}{2}$　なら OK。

イ)　$0<a<\frac{5}{2}$　の場合

点 P が　C_1　上なら　$AP_1=\sqrt{\frac{1}{5}a^2+1}$　,　C_2　上なら　$AP_2=|a-2|$

どちらがより近いかというと、　$AP_1{}^2=\frac{1}{5}a^2+1, AP_2{}^2=a^2-4a+4$　より

　$AP_2{}^2-AP_1{}^2=\frac{4}{5}a^2-4a+3=\frac{1}{5}(4a^2-20a+15)$　2 次不等式を解けばよい。

イー1) $\frac{5-\sqrt{10}}{2}<a<\frac{5+\sqrt{10}}{2}$ かつ $0<a<\frac{5}{2}$, すなわち $\frac{5-\sqrt{10}}{2}<a<\frac{5}{2}$ ならば $AP_2<AP_1$ だから $P_2=(2,0)$ で OK.

イー2) $a=\frac{5\pm\sqrt{10}}{2}$ かつ $0<a<\frac{5}{2}$, すなわち $a=\frac{5-\sqrt{10}}{2}$ ならば $AP_2=AP_1$ だから $P_2=(2,0)$ は最小値を与える。($P_1\neq(2,0)$ も最小値を与えるが等距離だから構わない。)

イー3) それ以外の場合、すなわち $0<a\leq\frac{5-\sqrt{10}}{2}$ なら $AP_2>AP_1$ だから $P_1\neq(2,0)$ で NG.

以上、まとめると $P=(2,0)$ が最小値を与えるのは $\frac{5-\sqrt{10}}{2}\leq a\leq\frac{5}{2}$ (答)