【1】(1) 角の二等分だから　$AD:DC=3:1$

$AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$　より

$AD=\frac{3}{4}\sqrt{10}$　(答)

(2)　△ECD と △ACB は相似だから

$EC:CD=AC:CB$　,

$(EB+1):\frac{1}{4}\sqrt{10}=\sqrt{10}:1$　,

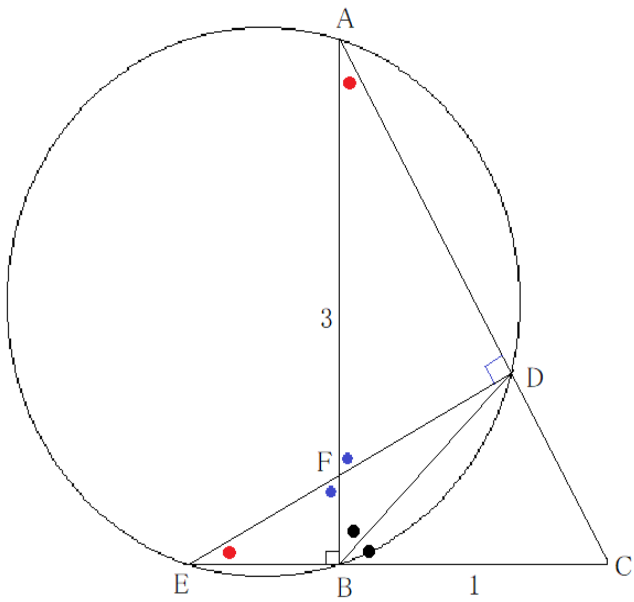
$EB+1=\frac{1}{4}\sqrt{10}\times\sqrt{10}\rightarrow EB=\frac{3}{2}$　(答)

(3)　△AFD と △ACB は相似だから

$AF:AD=AC:AB$　,

$AF:\frac{3}{4}\sqrt{10}=\sqrt{10}:3$　,

$3AF=\frac{3}{4}\sqrt{10}\times\sqrt{10}\rightarrow AF=\frac{5}{2}$　(答)



【2】(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より

$7=1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\to\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ (答)

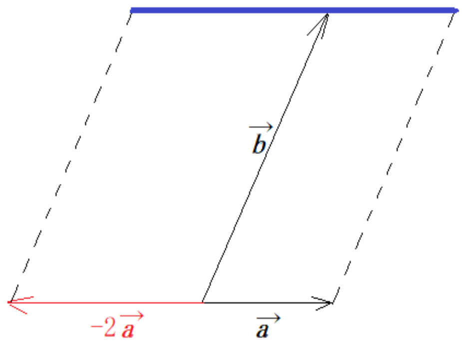
$|-2\vec{a}+\vec{b}|^2=(-2\vec{a}+\vec{b})\cdot(-2\vec{a}+\vec{b})=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1-4\times1+4=4$ より

$|-2\vec{a}+\vec{b}|=2$ (答)

(2) $k=s+t=1\to t=1-s$ だから $\overrightarrow{OP}=(3s-2)\vec{a}+\vec{b}$

ただし $0\leq s\leq 1$ より $-2\leq 3s-2\leq 1$

よって右図の青色の線分。(両端点を含む。)



(3) $\overrightarrow{OP}=(s-2t)\vec{a}+(s+t)\vec{b}$

ただし $s\geq 0, t\geq 0, 1\leq k=s+t\leq 2$

「ただし」の部分を図示すると下図の水色部分である。

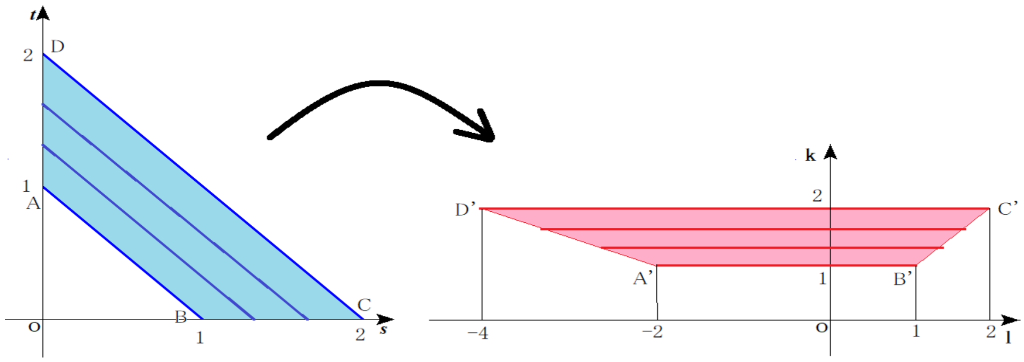
$\vec{a},\vec{b}$ の係数:

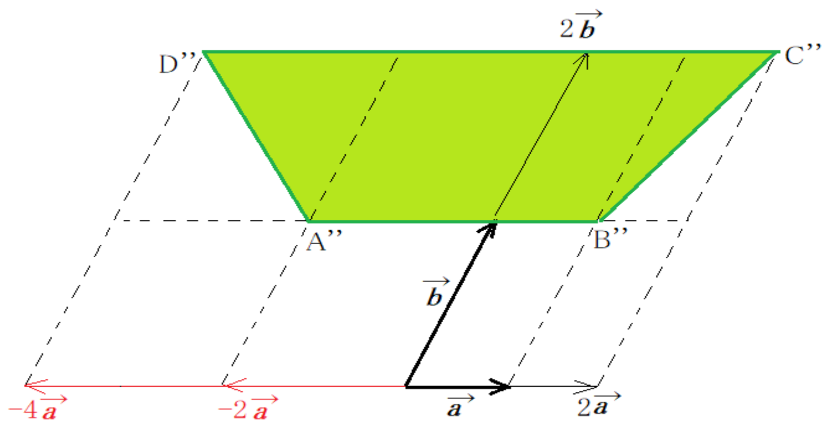
$l=s-2t, k=s+t$

を点 (s,t) から点 (l,k) への写像と考える。点の移り行く先は

$(0,1)\to(-2,1);(1,0)\to(1,1);(2,0)\to(2,2);(0,2)\to(-4,2)$

となり、水色の図形はピンク色の図形に移る。それに伴い、点 P の存在範囲は緑の部分(境界を含む)と分かる。





(答)

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\cos\theta=1\to\theta=60^\circ$ より

緑の台形の面積$=\dfrac{1}{2}(3|\vec{a}|+6|\vec{a}|)|\vec{b}|\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times9\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (答)

【3】(1)　$a_1=S_1$　だから

$$a_1=4\left(\frac{1}{3}a_1-2\right)\to a_1=24$$ (答)

(2)　$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$　だから

$$S_{n+1}=(n+4)\left(\frac{1}{3}a_{n+1}-2\right), S_n=(n+3)\left(\frac{1}{3}a_n-2\right)$$

の辺々を引いて

$$a_{n+1}=\frac{n+4}{3}a_{n+1}-\frac{n+3}{3}a_n-2 \quad ,$$

$$-\frac{n+1}{3}a_{n+1}=-\frac{n+3}{3}a_n-2 \quad ,$$

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}a_n+\frac{6}{n+1}$$ (答)

(3) 前問で求めた漸化式より　$a_2=51, a_3=87$　が分かる。階差は

$$b_1=a_2-a_1=27, b_2=a_3-a_2=36$$

だから、もし階差数列が初項27, 公差9の等差数列だとするならば

$$a_n=a_1+\sum_{k=1^{n-1}}(9k+18)=24+\frac{9}{2}n(n-1)+18(n-1)=\frac{9}{2}n^2+\frac{27}{2}n+6$$

とならねばならない。逆に一般項がこの式ならば、前問答の漸化式を満たす。実際、前問答の左辺は

$$a_{n+1}=\frac{9}{2}(n+1)^2+\frac{27}{2}(n+1)+6=\frac{9}{2}n^2+\frac{45}{2}n+24 \quad ,$$

前問答の右辺は

$$\frac{n+3}{n+1}\left(\frac{9}{2}n^2+\frac{27}{2}n+6\right)+\frac{6}{n+1}=\frac{3(n+3)(3n^2+9n+4)+12}{2(n+1)}=\frac{3(3n^3+18n^2+31n+16)}{2(n+1)}$$

$$=\frac{3(3n^2+15n+16)}{2}$$

だから、両式は一致する。したがって一般項は　$a_n=\frac{9}{2}n^2+\frac{27}{2}n+6$ (答)

【4】(1) $k=\int_0^{\pi/2} f(t)\cos t\,dt$ とおく。 $f(x)=\sin x+3k-\frac{3}{2}$ を左の式に代入すれば

$$k=\int_0^{\pi/2}(\sin t+3k-\frac{3}{2})\cos t\,dt=\int_0^{\pi/2}\{\frac{1}{2}\sin 2t+(3k-\frac{3}{2})\cos t\}dt$$

$$=[-\frac{1}{4}\cos 2t+3(k-\frac{1}{2})\sin t]_0^{\pi/2}=-\frac{1}{4}(-1-1)+3(k-\frac{1}{2})=3k-1 \quad ,$$

$$k=\frac{1}{2} \quad ,$$

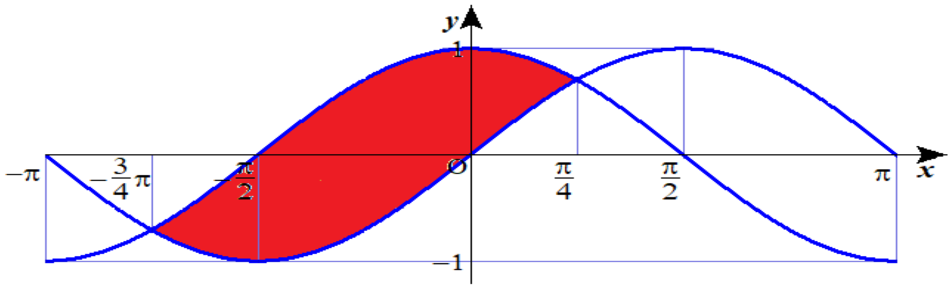
よって $f(x)=\sin x+3\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\sin x$ (答)

(2) $g(x)=-\int_0^x x\cos t\,dt+\int_0^x t\cos t\,dt+1=-x\int_0^x \cos t\,dt+\int_0^x t\cos t\,dt+1$ を微分すると

$$g'(x)=-\int_0^x \cos t\,dt-x\cos x+x\cos x=-\sin x \quad (答)$$

(3) 前問の答を積分して

$$g(x)=g(0)+\int_0^x g'(t)\,dt=1-\int_0^x \sin t\,dt=1+[\cos t]_0^x=\cos x$$



$$S=\int_{-3/4\pi}^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx=[\sin x+\cos x]_{-3/4\pi}^{\pi/4}=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})-(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{2} \quad (答)$$