前期日程

I

(1)　$f'(x)=e^x(e^x-a)+(e^x-1)e^x=e^x(2e^x-a-1)$,
　　$f''(x)=e^x(2e^x-a-1)+e^x\cdot 2e^x=e^x(4e^x-a-1)$

より、臨界点は　$e^x=\dfrac{a+1}{2}\Leftrightarrow x=\log\dfrac{a+1}{2}$　でこの前後で減少から増加に転ずる。変曲点は

$e^x=\dfrac{a+1}{4}\Leftrightarrow x=\log\dfrac{a+1}{4}$　でこの前後で上に凸から下に凸に転ずる。増減表は下図。

x	…	$\log\frac{a+1}{4}$	…	$\log\frac{a+1}{2}$	…
f'	−	−	−	0	+
f''	⌒ −	0	∪ +	∪ +	∪ +
f	↘	$-\frac{(a-3)(3a-1)}{16}$	↘	$-\frac{(a-1)^2}{4}$	↗

極小値は　$f(\log\dfrac{a+1}{2})=-\dfrac{(a-1)^2}{4}$　, 変曲点は　$(\log\dfrac{a+1}{4},-\dfrac{(a-3)(3a-1)}{16})$　である。

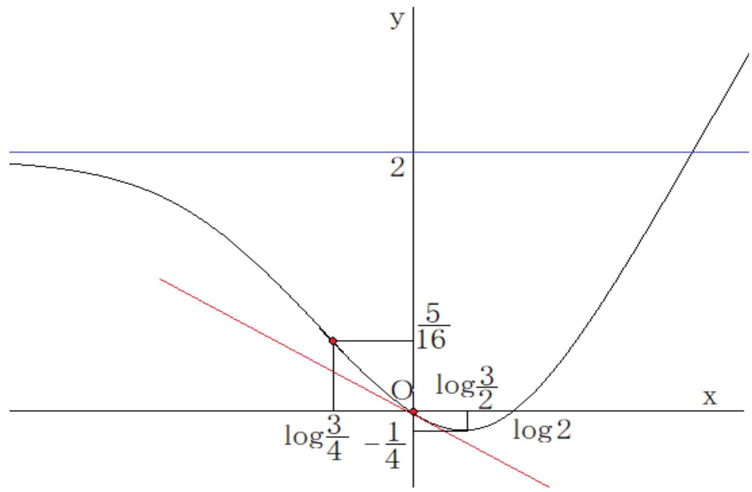
$a=2$　のときのグラフは下図。

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$　,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$

に注意すれば

$y=2$　が漸近線だと分かる。



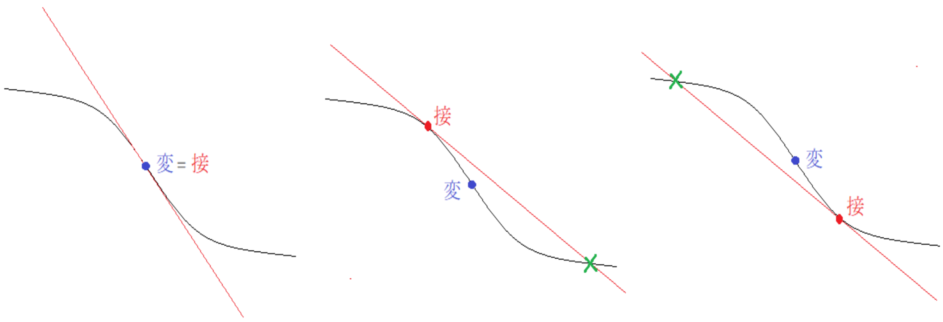
(2)　$S=-\int_0^{\log a}(e^x-1)(e^x-a)\,dx=-\int_0^{\log a}\{e^{2x}-(a+1)e^x+a\}\,dx=\Big[-\dfrac{1}{2}e^{2x}+(a+1)e^x-ax\Big]_0^{\log a}$

$=-\dfrac{1}{2}(a^2-1)+(a+1)(a-1)-a\log a=\dfrac{1}{2}(a^2-1)-a\log a$　(答)

(3) 右図から分かるように、変曲点と接点が一致すればよい。よって

$\log\dfrac{a+1}{4}=0$　,

$a=3$　(答)



II

(1) 2 が公約数であると仮定する。2 は a の約数になるから n は偶数でなければならない。そうすると b は奇数となり、矛盾。2 は公約数ではない。■

(2) mod.5 で考える。5 が a の約数だから

$$n \equiv 0 \quad \text{または} \quad n \equiv 3 \quad .$$

同様に 5 は b の約数でもあるから

$$n \equiv 2 \quad \text{または} \quad n \equiv 0 \quad .$$

この 2 つの条件を満たす n は

$$n \equiv 0 (mod.5)$$

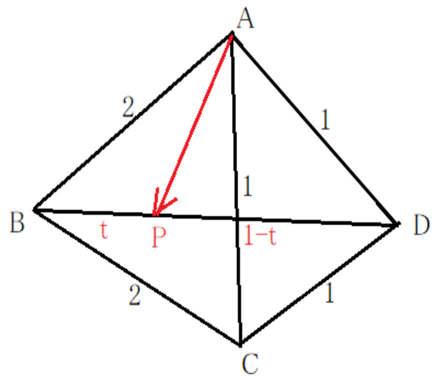
しかない。よって、答は自然数 n が 5 の倍数であること。(n=5, 10, 15, …) (答)

(3) p>5 を素数とする。p は a の約数だから、n または n+2 は p で割り切れる。ところで

$$n < n+2 < n+3 < n+5 < n+p < n+p+2$$

だから、n が p の倍数なら、次の p の倍数は n+p だが、b の因子は両方とも n と n+p の間にあるから両方とも p では割り切れない。
また、n+2 が p の倍数なら、次の p の倍数は n+p+2 だが、b の因子は両方とも n+2 と n+p+2 の間にあるから、やはり両方とも p では割り切れない。
いずれにせよ p は b の約数になりえない。■

III



(1) 余弦定理より　$\cos\angle BAC=\dfrac{2^2+1^2-2^2}{2\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{1}{4}$　.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=2\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\quad \text{(答)}$$

(2)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ところで△ACD は 1 辺 1 の正三角形だから

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\ .$$

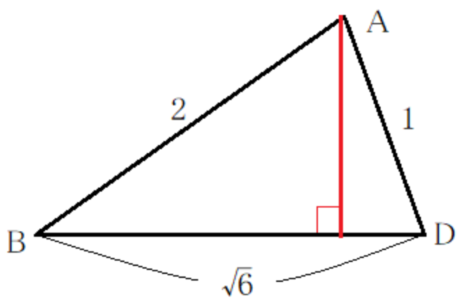
よって

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\quad ■$$

(3)　$\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AD}$　とおく。

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(1-t)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(1-t)=\frac{1}{2}\quad ■$$

(4)　$\cos\angle CAP=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{1/2}{AP}$　だから線分 AP の長さを最小にすればよい。それには△ABD において点 A から対辺に下した垂線の足を P とすればよい。そのときの AP の長さを求めよう。



$$\cos\angle ABD=\frac{4+6-1}{4\sqrt{6}}=\frac{9}{4\sqrt{6}}\ ,$$

$$\sin\angle ABD=\sqrt{1-\left(\frac{9}{4\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\ ,$$

$$AP=2\sin\angle ABD=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\ .$$

したがって求めるべき最大値は

$$\cos\angle CAP=\frac{1/2}{\sqrt{5}/(2\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\quad \text{(答)}$$

IV

(1) 第n群の初項は　$a=1,6,11,16,\cdots=5n-4$　, 末項は　$l=4,9,14,19,\cdots=5n-1$　だから、和は

$$\frac{4(a+l)}{2}=\frac{4(5n-4+5n-1)}{2}=20n-10\quad(答)$$

(2) 3の倍数が2個あるのは初項と末項がともに3の倍数であるとき。末項を3の倍数として

$$5n-1=3k \Leftrightarrow 5n-3k=1$$

いわゆる不定方程式で特殊解

$$5\times2-3\times3=1$$

より一般解

$$n=2+3l,\ k=3+5l$$

が得られる。よって求めるべき　$n=2+3l$　は

$$2,5,8,11,\cdots$$

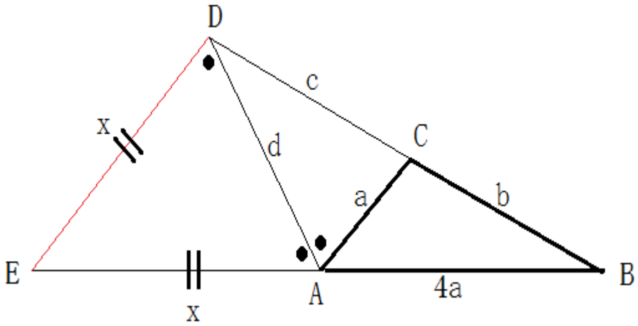
となり、これは初項2, 公差3の等差数列である。■

(3) すべての群における和の総計から、3の倍数を2個含む群の和の総計を引けばよい。

$$\sum_{n=1}^{30}(20n-10)-\sum_{l=0}^{9}\{20(2+3l)-10\}=20\sum_{n=1}^{30}n-10\times30-60\sum_{l=0}^{9}l-30\times10$$

$$=20\times\frac{30\times31}{2}-300-60\times\frac{9\times10}{2}-300=9300-300-2700-300=6000\quad(答)$$

V



(1) 一般に三角形の 3 辺を　x, y, z　とすれば

$$|y-z|<x<y+z\quad .$$

よって

$$4a-a<b<4a+a\quad ,$$

$$3a<b<5a\quad ■$$

(2) 右図のように D を通って CA に平行な直線と BA の延長との交点を E とする。

△ABC と △EBD は相似になるから、　$x=AE=ED$　とおくならば

$$\frac{a}{x}=\frac{4a}{x+4a}=\frac{b}{b+c}$$

左辺と中辺から　$\frac{4a}{4x}=\frac{4a}{x+4a}\rightarrow x=\frac{4}{3}a$　. 左辺と右辺とで　$\frac{3}{4}=\frac{b}{b+c}\rightarrow 3(b+c)=4b\rightarrow b=3c$　■

(3) 余弦定理より

$$\cos\angle CAB=\frac{a^2+(4a)^2-b^2}{8a^2}=\frac{17a^2-b^2}{8a^2}$$

再び余弦定理より

$$d^2=x^2+x^2-2x^2\cos\angle CAB=2x^2(1-\frac{17a^2-b^2}{8a^2})=2(\frac{4}{3}a)^2\times\frac{b^2-9a^2}{8a^2}=\frac{4}{9}(b^2-9a^2)$$

前問の答を使って

$$d^2=\frac{4}{9}(9c^2-9a^2)=4(c^2-a^2)\quad ■$$

(4) 前問の答より　$d=2\sqrt{c^2-a^2}\leq 8$　だがこれが自然数だから$\sqrt{\ }$ の中は 2 乗数 1, 4, 9, 16 のいずれかである。$\sqrt{\ }$ の中は因数分解できて

$$(c+a)(c-a)=1,4,9,16$$

$(c+a)-(c-a)=2a\geq 2$　に注意して、右辺の自然数も因数分解すれば

$$(c+a, c-a)=(4,1),(9,1),(16,1),(8,2)$$

この a, c についての連立方程式を解いて得られる自然数解は 2 番目と 4 番目から出てくる

$$(a, c)=(4,5),(3,5)$$

これに対応して　$(a, b, c)=(4, 15, 5),(3, 15, 5)$　となるが、このうち(1) の条件を満たすのは前者。

よって　$a=4, b=15$　(答)

VI

(1) 3 点 O, P, Q が 1 直線上だから

$$\frac{y}{x}=\frac{t}{s} \quad .$$

また OP・OQ=1 より 2 乗して

$$(x^2+y^2)(s^2+t^2)=1 \quad .$$

2 式から

$$x^2\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)(s^2+t^2)=1 \to x^2=\frac{s^2}{(s^2+t^2)^2} \to x=\frac{s}{s^2+t^2} \quad ,$$

$$y=\frac{t}{s}x=\frac{t}{s^2+t^2} \quad \text{(答)}$$

(2) 円の式に代入すると

$$\left(\frac{s}{s^2+t^2}-1\right)^2+\left(\frac{t}{s^2+t^2}-1\right)^2=2 \to \{s-(s^2+t^2)\}^2+\{t-(s^2+t^2)\}^2=2(s^2+t^2)^2 \quad ,$$

$$s^2+t^2-2(s+t)(s^2+t^2)=0 \quad ,$$

$$1-2(s+t)=0 \quad ,$$

$$s+t=\frac{1}{2} \quad ■$$

後期日程

I

(1) $f(0)=-|t|+1\geq 0 \Leftrightarrow |t|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq t\leq 1$,

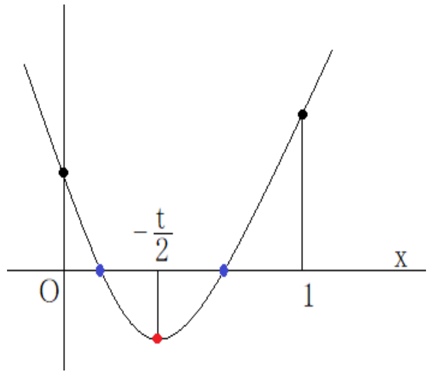
$f(1)=2+t-|t|\geq 0 \Leftrightarrow t-|t|\geq -2$

ア) $t\geq 0$ なら第 2 の不等式は $0\geq -2$ という当たり前の不等式になる。

イ) $t<0$ なら第 2 の不等式は $t\geq -1$ になって、これは第 1 の不等式を満たしている。

結局、ア) イ) ともに第 2 の不等式はどうでもよく、第 1 の不等式さえ満たせばよい。

(答) $-1\leq t\leq 1$



(2) 平方完成すると $f(x)=(x+\frac{t}{2})^2-\frac{t^2}{4}-|t|+1$ で、

頂点の x 座標 $x=-\frac{t}{2}$ だから、これが 0 と 1 の間に

あって値が負になればよい。よって

$$(0<-\frac{t}{2}<1)\wedge(-\frac{t^2}{4}-|t|+1<0) \;,$$

$$(-2<t<0)\wedge(t^2-4t-4>0) \;,$$

$$(-2<t<0)\wedge(t^2-4t-4>0) \;,$$

$$-2<t<2-2\sqrt{2}$$

これと(1) の答の共通部分をとって $-1\leq t<2-2\sqrt{2}$ (答)

(3) t が負であることに注意して、放物線と x 軸との交点の x 座標を求めると

$$x^2+tx+t+1=0\rightarrow x=\frac{-t\pm\sqrt{t^2-4(t+1)}}{2} \;.$$

この 2 根を $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ とおけば

$$\alpha+\beta=-t,\alpha\beta=t+1,\beta-\alpha=\sqrt{t^2-4(t+1)}$$

よって

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2+tx+t+1)dx=-[\frac{1}{3}x^3+\frac{t}{2}x^2+(t+1)x]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{t}{2}(\beta^2-\alpha^2)-(t+1)(\beta-\alpha)$$

$$=(\beta-\alpha)\{-\frac{1}{3}((\alpha+\beta)^2-\alpha\beta)-\frac{t}{2}(\alpha+\beta)-t-1\}$$

$$=\sqrt{t^2-4t-4}\{-\frac{1}{3}(t^2-t-1)+\frac{t^2}{2}-t-1\}=\frac{1}{6}(t^2-4t-4)\sqrt{t^2-4t-4} \quad \text{(答)}$$

II

(1) $(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})=(\frac{d}{dt}(1-\cos at),\frac{d}{dt}(at-\sin at))=(a\sin at, a-a\cos at)$ (答)

$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{a^2\sin^2 at+a^2(1-\cos at)^2}=a\sqrt{\sin^2 at+\cos^2 at+1-2\cos at}$

$=a\sqrt{2-2\cos at}$ (答)

(2) $a\sqrt{2-2\cos at}=\sqrt{2}a\to 1-\cos at=1\to\cos at=0$ より $at=(n+\frac{1}{2})\pi, n\geq 0$.

よって

$t=\frac{1}{a}(n+\frac{1}{2})\pi, n\geq 0$ (答)

これに対応するPは、nの偶奇に伴い

$(1-\cos at, at-\sin at)=(1-\cos(n+\frac{1}{2})\pi,(n+\frac{1}{2})\pi-\sin(n+\frac{1}{2})\pi)=(1,(n+\frac{1}{2})\pi-(\pm 1))$

だから1つにまとめて表記すると

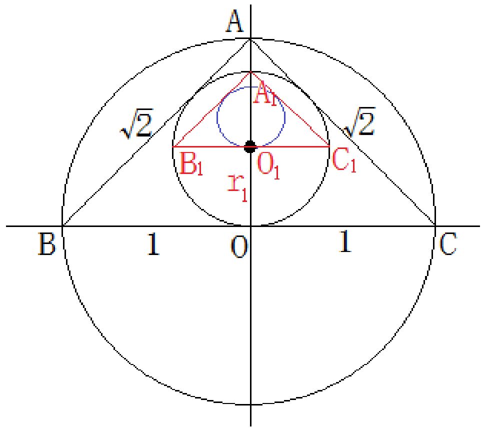
$P(1,(n+\frac{1}{2})\pi+(-1)^{n+1})$ (答)

(3) $t_1=\frac{\pi}{2a}$ に注意。半角の公式を使って

$L=\int_0^{\pi/(2a)} a\sqrt{2(1-\cos at)}dt=\sqrt{2}a\int_0^{\pi/(2a)}\sqrt{2\sin^2\frac{at}{2}}dt=2a\int_0^{\pi/(2a)}\sin\frac{at}{2}dt$

$=-2a[\frac{2}{a}\cos\frac{at}{2}]_0^{\pi/(2a)}=-4(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0)=4(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=4-2\sqrt{2}$ (答)

III



(1) 直角二等辺三角形△ABC の 3 辺は $2, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ で、面積は S=1 である。よって内接円の半径 r_1 は

$$S=\frac{1}{2}(2+\sqrt{2}+\sqrt{2})r_1=1 \leftarrow r_1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1 \quad (答)$$

中心 O_1 は原点から r_1 だけ上がったところだから、

$$O_1=(0,r_1)=(0,\sqrt{2}-1) \quad (答)$$

(2) $\triangle ABC$ と $\triangle A_1B_1C_1$ は相似で、相似比は

$$1:r_1$$

であり、 $\triangle A_1B_1C_1$ と $\triangle A_2B_2C_2$ の関係、および相似比も同じである。よって

$$r_2=r_1\times r_1=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2} \quad (答)$$

(3) $r_n=r_1\times r_1\times\cdots r_1=r_1{}^n=(\sqrt{2}-1)^n$ (答)

(4) 求めるべき中心は原点からどんどん上げていけばよいから、

$$p_n=r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n=r_1+r_1{}^2+r_1{}^2+\cdots+r_1{}^n=\frac{r_1(1-r_1{}^n)}{1-r_1}=\frac{(\sqrt{2}-1)\{1-(\sqrt{2}-1)^n\}}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1-(\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}} \quad (答)$$

$$\lim p_n=\lim\frac{1-(\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}}=\frac{1-0}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (答)$$