1 $x > -1$ において，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^{kx}}{\sqrt{x^3+1}}, \qquad g(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$

により定義する。ただし，k は定数である。

(1) $f'(x)$ を計算せよ。

(2) $g(x)$ の増減を調べ，$g(x)$ の極値を求めよ。

(3) 方程式 $f'(x) = 0$ の相異なる実数解の個数を求めよ。

(4) $f(x)$ が極値をとる x の値の個数を求めよ。

$\boxed{2}$ 初項が $x_1 = 2,\ y_1 = 1$ である数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次で定める。

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 5y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

(1) 数列 $\{x_n{}^2 - 5y_n{}^2\}$ の一般項を求めよ。

(2) 自然数 n を含む次の条件を (P_n) とする。

(P_n) $x_n \geqq 2y_n$ かつ $y_n \geqq 4^{n-1}$

k を自然数とする。(P_k) が成り立つならば (P_{k+1}) も成り立つことを示せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ を求めよ。

3 点 O を原点とする座標平面内の円 $x^2+y^2=1$ を C とする。$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1$ を満たす t に対し，直線 $y=-x+\sqrt{2}\,t$ を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点を A とする。次の連立不等式で表される平面図形を D とする。

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1 \\ y \leqq -x+\sqrt{2}\,t \\ 0 \leqq y \leqq x \end{cases}$$

C と ℓ の共有点で D に属する点を B とし，$\angle \mathrm{AOB}=\theta$ とする。D の面積を $S(t)$ とする。

(1) t を θ で表せ。

(2) $S(t)$ を θ で表せ。

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)\,dt$ の値を求めよ。

(4) 座標空間内の 4 点 $(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, $(0,\ \sqrt{2},\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, $(0,\ -\sqrt{2},\ 0)$ を頂点とする正方形を R とする。R を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする四角錐を V とする。すなわち，V は次の連立不等式で表される。

$$\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 1 \\ |y| \leqq -|x|+\sqrt{2}\,(1-z) \end{cases}$$

また，$x^2+y^2<1$, $0 \leqq z \leqq 1$ で表される円柱を W とする。V から W を除いた立体を K とする。z 軸に直交する平面による K の断面を考えることで，K の体積を求めよ。

4 三角形 OAB の３辺の長さは

$$\mathrm{OA}=8,\quad \mathrm{OB}=10,\quad \mathrm{AB}=12$$

である。この三角形の外心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) 辺 OA 上に O と異なる点 D をとり，$\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}=x$ とする。直線 DG が辺 OB と交わるための x の値の範囲を求めよ。

(5) (4) の範囲で点 D を動かす。直線 DG と辺 OB の交点を E とするとき，三角形 ODE の面積の最小値とそのときの x の値を求めよ。