【1】(1) $f'(x)=\left(ke^{kx}\sqrt{x^3+1}-\dfrac{e^{kx}\cdot 3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}\right)/(x^3+1)$

$$=\frac{2ke^{kx}(x^3+1)-3x^2e^{kx}}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}=\frac{e^{kx}(2kx^3-3x^2+2k)}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$$ (答)

(2) $g'(x)=\dfrac{2x(x^3+1)-x^2\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=\dfrac{-x(x^3-2)}{(x^3+1)^2}$

x	−1	…	0	…	$\sqrt[3]{2}$	…
g'		−	0	+	0	−
g	∞	↘	0	↗	$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘

臨界点は $x=0, \sqrt[3]{2}$ であり、

$\lim_{x\to -1+0} g(x)=\infty$,

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim \dfrac{1/x}{1+1/x^3}=0$

より $x=-1, y=0$ の 2 本の漸近線がある。

極大値は $g(\sqrt[3]{2})=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$, 極小値は $g(0)=0$. (答)

(3) f' の分子の中の $h(x)=2kx^3-3x^2+2k$ の実数解 (x 軸との交点) の個数が問題である。

$h'(x)=6kx^2-6x=6x(kx-1)$

だから k の符号で場合分けする。

ア) $k>0$ のとき、右図(上)。

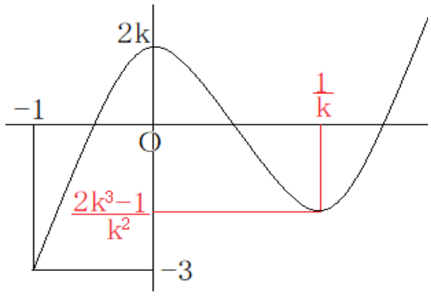
$\dfrac{2k^3-1}{k^2}>0 \Leftrightarrow k>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら 1 個。

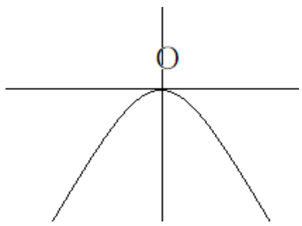
$k=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら 2 個。

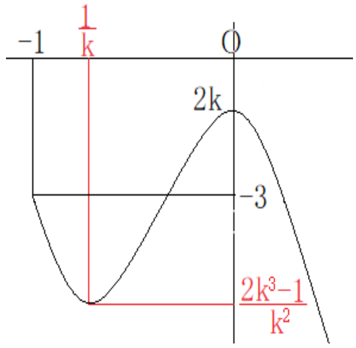
$0<k<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら 3 個。

イ) $k=0$ のとき、右図(中)。1 個。

ウ) $k<0$ のとき、右図(下)。0 個。(答)







(4) 2 重解のときは導関数の符号が変わらず、停留となり極値をとらないことに注意。

$k>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら極小値が 1 個。

$k=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら(停留値 1 個と) 極小値が 1 個。

$0<k<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら極小値 2 個と極大値 1 個の合わせて 3 個。

$k=0$ なら(停留値 1 個のみだから) 極値は 0 個。

$k<0$ なら(単調減少で) 極値 0 個。

まとめると

$k\geq\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら 1 個、

$0<k<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ なら 3 個、

$k\leq 0$ なら 0 個。(答)

【2】(1) $x_{n+1}{}^2-5y_{n+1}{}^2=(2x_n+5y_n)^2-5(x_n+2y_n)^2=-(x_n{}^2-5y_n{}^2)$ より、初項 $x_1{}^2-5y_1{}^2=-1$,
公比 -1 の等比数列である。よって $x_n{}^2-5y_n{}^2=-(-1)^{n-1}=(-1)^n$ (答)

(2) $(x_k\geq 2y_k)\wedge(y_k\geq 4^{k-1})$ を仮定する。
$x_{k+1}-2y_{k+1}=(2x_k+5y_k)-2(x_k+2y_k)=y_k\geq 4^{k-1}\geq 1\geq 0$ より $x_{k+1}\geq 2y_{k+1}$.
$y_{k+1}=x_k+2y_k\geq 2y_k+2y_k=4y_k\geq 4\cdot 4^{k-1}=4^k$ より $y_{k+1}\geq 4^{(k+1)-1}$.
よって (P_{k+1}) が成り立つ。■

(3) $|x_n{}^2-5y_n{}^2|=1$ であり、 $y_n{}^2\geq 16^{n-1}$ だから

$$0\leq\frac{|x_n{}^2-5y_n{}^2|}{y_n{}^2}\leq\frac{1}{16^{n-1}}\ .$$

挟み撃ちの原理により $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2-5\right|=0\to\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2=5$.

したがって $\lim\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\sqrt{\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2}=\sqrt{5}$ (答)

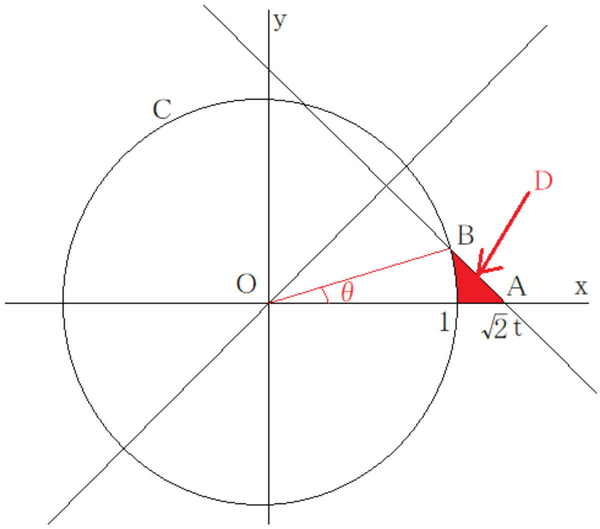
【3】(1) 円周上の点Bを

$$B(\cos\theta, \sin\theta)$$

とおく。この点が直線　$y=-x+\sqrt{2}t$　上にあるから

$$\sin\theta=-\cos\theta+\sqrt{2}t \quad ,$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta) \quad \text{(答)}$$



(2)　$A=(\sqrt{2}t, 0)$　に注意して、底辺と高さから三角形の面積を出し、扇形の面積を引く。

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{2}t\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\theta \quad \text{(答)}$$

(3) 置換積分をする。(1) より

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$$

に注意する。

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}S(t)dt=\int_0^{\pi/4}\left\{\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\theta\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta-\theta(\cos\theta-\sin\theta)\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}(2\cos^2\theta-1)\sin\theta\, d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\theta\sin(\theta-\frac{\pi}{4})d\theta \quad ,$$

前項の積分は

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\cos\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{-\frac{2}{3}(\frac{1}{2\sqrt{2}}-1)+(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6\sqrt{2}} \quad ,$$

後項の積分は

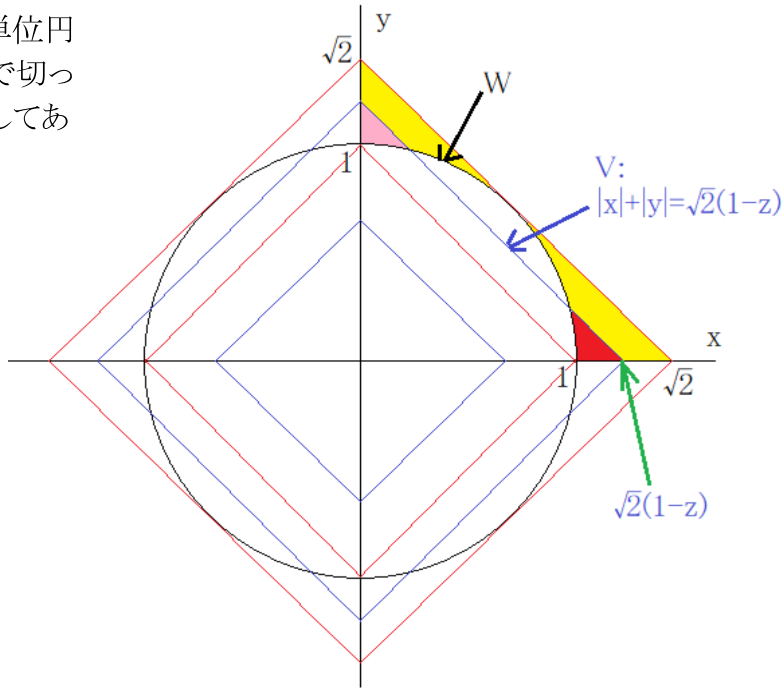
$$I_2=\frac{1}{2}\left[-\theta\cos(\theta-\frac{\pi}{4})\right]_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})d\theta=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left[\sin(\theta-\frac{\pi}{4})\right]_0^{\pi/4}$$

$$=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

だから、求めるべき定積分の値は

$$I_1+I_2=(\frac{1}{6}-\frac{1}{6\sqrt{2}})+(-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}})=\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{6}-\frac{\pi}{8} \quad \text{(答)}$$

(4) 立体図形を真上から見る。W は単位円に見える。V を z 軸に直交する平面で切ってできる断面(=等高線) が右図に記してある。



体積を求めるには、右図の赤い部分を 8 個分の面積を z 軸方向に積分すればよい。この赤色部分は(2) の結果を利用して

$$S(1-z)$$

と表せる。積分区間は

$$1\leq\sqrt{2}(1-z)\leq\sqrt{2}$$

より

$$0\leq z\leq 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad .$$

よって体積は

$$V(K)=8\int_0^{1-1/\sqrt{2}}S(1-z)\,dz$$

だが、 $1-z=t,-dz=dt,t=1\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ と置換して

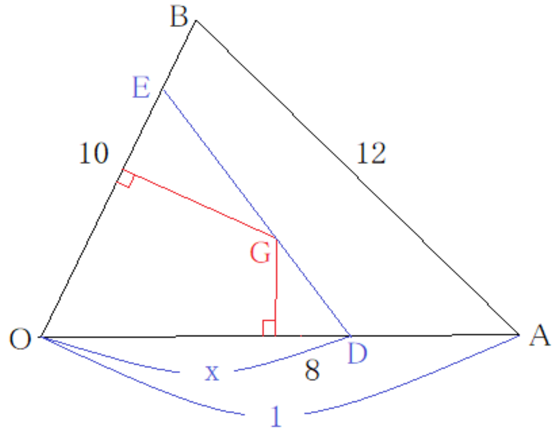
$$V(K)=8\int_{1/\sqrt{2}}^{1}S(t)\,dt=8\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{6}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{4}{3}-\pi\quad (答)$$

【4】(1) 余弦定理より

$$\cos\angle AOB=\frac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 10}=\frac{1}{8}$$

だから内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=8\cdot 10\cdot\frac{1}{8}=10\quad(\text{答})$$



(2) $S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\sqrt{1-(\frac{1}{8})^2}$

$=15\sqrt{7}$ (答)

(3) 重心は各辺の垂直二等分線の交点だから $\overrightarrow{OG}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおけば

$$(s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a})\cdot\vec{a}=0,\ (s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b})\cdot\vec{b}=0\ ,$$

$$64(s-\frac{1}{2})+10t=0,\ 10s+100(t-\frac{1}{2})=0\ ,$$

$$s=\frac{3}{7},\ t=\frac{16}{35}\ .$$

よって $\overrightarrow{OG}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{16}{35}\vec{b}$ (答)

(4) $\overrightarrow{OE}$ を二様に書き表すと

$$\overrightarrow{OD}+k\,\overrightarrow{DG}=l\,\overrightarrow{OB},\ 0\le l\le 1\ ,$$

$$x\vec{a}+k(\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{16}{35}\vec{b}-x\vec{a})=l\vec{b},\ 0\le l\le 1,\ 0<x\le 1\ ,$$

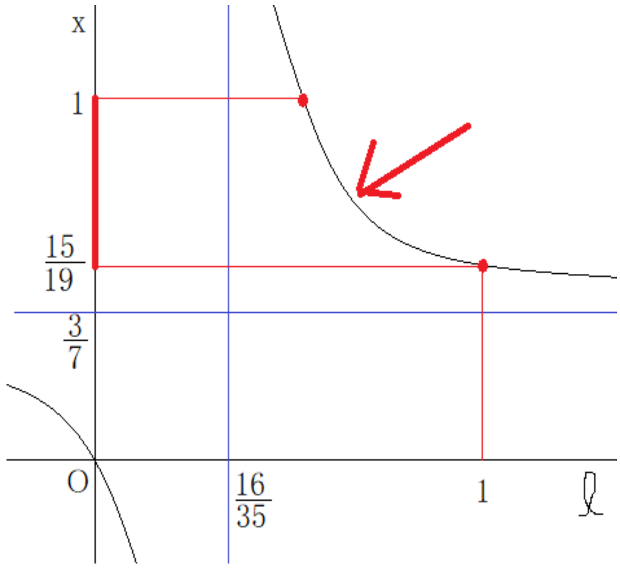
$$(x+\frac{3}{7}k-kx)\vec{a}+(\frac{16}{35}k-l)\vec{b}=\vec{0},\ 0\le l\le 1,\ 0<x\le 1\ ,$$

$$x+\frac{3}{7}k-kx=0,\ \frac{16}{35}k-l=0,\ 0\le l\le 1,\ 0<x\le 1\ .$$

ここから k を消去すると

$$x=\frac{15l}{35l-16},\ 0\le l\le 1,\ 0<x\le 1\ .$$

変形して $x=\frac{3}{7}+\frac{80}{7(35l-16)}$ のグラフを描けば右図の直角双曲線である。 l,x の変域に注意して $\frac{15}{19}\le x\le 1$ (答)



(5) $\triangle ODE=\frac{1}{2}OD\cdot OE\sin\angle AOB$

$$=\frac{1}{2}(8x)(10l)\frac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}xl$$

$$=\frac{48\sqrt{7}x^2}{7x-3}=\frac{48\sqrt{7}}{49}(7x+3+\frac{9}{7x-3})$$

$$=\frac{48\sqrt{7}}{49}(6+2\sqrt{\frac{9(7x-3)}{7x-3}})\ge\frac{576\sqrt{7}}{49}\quad(\text{答})$$

相加・相乗平均の関係で等号成立は $7x-3=\frac{9}{7x-3}\Leftrightarrow x=\frac{6}{7}$ のとき。(答)