問　題　紙

1 双曲線$x^2-y^2=1$の$x>0$の部分をC_1，$x<0$の部分をC_2とする。以下の問に答えよ。

(1) 直線$ax-by=1$がC_1，C_2の両方と1点ずつで交わるためのa，bの条件を求めよ。

(2) a，bは(1)で求めた条件をみたすものとする。点A$(a,\ b)$をとり，直線$ax-by=1$とC_1，C_2の交点をそれぞれP，Qとする。このとき△APQの面積Sをa，bを用いて表せ。

(3) 面積Sの最小値を求めよ。また，その最小値をとるためのa，bの条件を求めよ。

2 3つの数 2，m^2+1，m^4+1が相異なる素数となる正の整数mが1つ固定されているものとする。以下の問に答えよ。

(1) 3つの数 2，m^2+1，m^4+1のうち，1つをaとし，残りの2つをb，cとする。このとき$a^2<bc$となるaをすべて求めよ。

(2) 正の整数x，yが$(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)$をみたしているとき$x$，$y$を求めよ。

3 以下の問に答えよ。

(1) 関数$f(x)$は，区間$0\leqq x\leqq 2\pi$で第2次導関数$f''(x)$をもち$f''(x)>0$をみたしているとする。区間$0\leqq x\leqq\pi$で関数$F(x)$を

$$F(x)=f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)$$

と定義するとき，区間$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$で$F(x)\geqq 0$であることを示せ。

(2) $f(x)$を(1)の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx\geqq 0$$

を示せ。

(3) 関数$g(x)$は，区間$0\leqq x\leqq 2\pi$で導関数$g'(x)$をもち$g'(x)<0$をみたしているとする。このとき，

$$\int_0^{2\pi}g(x)\sin x\,dx\geqq 0$$

を示せ。

4 2名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う。

(i) 正方形の4つの頂点を反時計回りにA，B，C，Dとする。両者はコマを1つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマはA，後攻の持ちゴマはCに置いてあるとする。

(ii) 先攻から始めて，交互にサイコロを振る。ただしサイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。出た目を3で割った余りが0のときコマは動かさない。また余りが1のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが2のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうどn回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率をp_nとする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) p_2，p_3を求めよ。

(2) p_nを求めよ。

(3) このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち2以上の任意の整数Nに対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}p_{2m-1}<\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}p_{2m}$$

が成り立つことを示せ。ただし正の実数aに対し$[a]$は，その整数部分($k\leqq a<k+1$となる整数k)を表す。