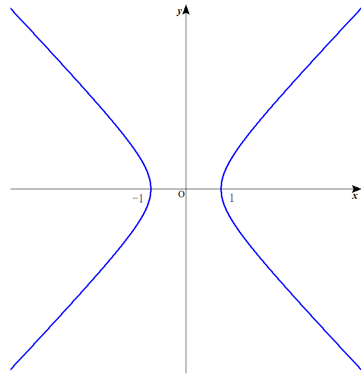
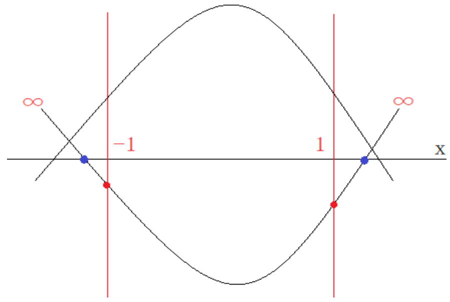
【第 1 問】(1) 2 式を連立する。 $by=ax-1$ を $b^2x^2-b^2y^2=b^2$ に代入。

$$b^2x^2-(a^2x^2-2ax+1)=b^2 \to (b^2-a^2)x^2+2ax-(b^2+1)=0$$



$f(x)=(b^2-a^2)x^2+2ax-(b^2+1)$ のグラフが $x\leq -1, 1\leq x$ の範囲で 1 個ずつ零点を持てばよい。



ア) $b^2-a^2>0$ のとき

$f(-1)\leq 0, f(1)\leq 0$

であればよい。よって

$-a^2-2a-1\leq 0, -a^2+2a-1\leq 0$

だから

$(a+1)^2\geq 0, (a-1)^2\geq 0$

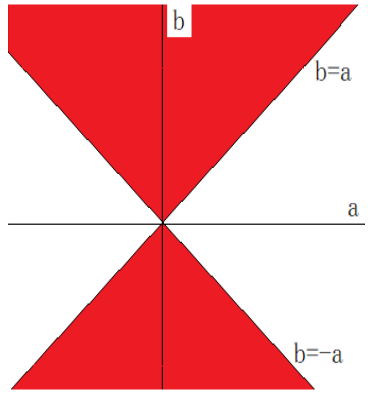
これは常に成り立つ。

イ) $b^2-a^2<0$ のとき

上と反対で、 $f(-1)\geq 0, f(1)\geq 0$ だから常に成り立たない。

したがって求めるべき条件は $b^2-a^2>0$ (答)

【蛇足】 $(b-a)(b+a)>0$ だから図示すれば右図。

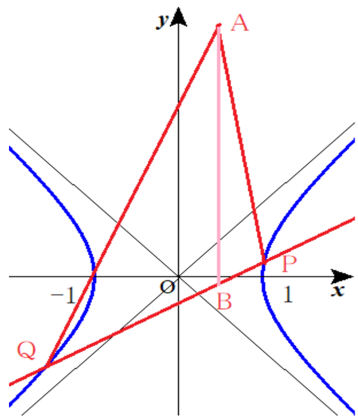


(2) 点 A の y 座標が正とする(b>0) 。点 A から直線 PQ に下した垂線の足を B とする。各点の座標は $f(x)=0$ の解を $\alpha, \beta(\alpha>\beta)$ とすれば

$$P\left(\alpha, \frac{a\alpha-1}{b}\right), Q\left(\beta, \frac{a\beta-1}{b}\right), A(a,b), B\left(a, \frac{a^2-1}{b}\right)$$

だから△APQ の面積は

$$S=\frac{1}{2}AB(\alpha-a)+\frac{1}{2}AB(a-\beta)=\frac{1}{2}AB(\alpha-\beta)$$



ちなみに右図は $\alpha>a>\beta$ のときのものになっているが、a はこの範囲になくても三角形の面積は上式でかまわない。

$$S=\frac{1}{2}\left(b-\frac{a^2-1}{b}\right)\frac{2\sqrt{a^2+(b^2-a^2)(b^2+1)}}{b^2-a^2}$$

$$=\frac{b^2-a^2+1}{2b}\times\frac{2b\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}=\frac{(b^2-a^2+1)\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2} \quad (答)$$

一方、点 A の y 座標が負(b<0) のときは

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-1}{b}-b\right)\frac{2|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}=\frac{-(b^2-a^2+1)}{2b}\times\frac{2(-b)\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$$

だから、結局同じだ。

(3) $t=b^2-a^2>0$ とおいて $S(t)=\frac{(t+1)\sqrt{t+1}}{t}, t>0$ の最小値を求めよう。

$$S(t)=\frac{(t+1)\sqrt{t+1}}{t}, t>0$$

だから t=2 で極小だから、最小値は $S(2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (答)

そのとき $b^2-a^2=2$ (答)

【第 2 問】(1) 相異なる 3 数だから m=1 ではありえない。よって m≧2

ア)　$a=2$ の場合　$4<(m^2+1)(m^4+1)$ となる。実際 m≧2 より右辺は　5×17　以上だから。

イ)　$a=m^2+1$ の場合　$(m^2+1)^2<2(m^4+1)$ となる。

　実際、右辺－左辺＝　$2(m^4+1)-(m^2+1)^2=m^4-2m^2+1=(m^2-1)^2$　だが m≧2 だから、＞0

ウ)　$a=m^4+1$ の場合　$(m^4+1)^2<2(m^2+1)$ にはなりえない。

　なぜなら　$m^4+1>m^2+1, m^4+1>2\to(m^4+1)^2>2(m^2+1)$　だから。

結局 a になれるのは ア) イ) だから、　$2, m^2+1$　の 2 つ (答)

(2) 右辺の素因数分解に因子 2 が含まれているから、左辺の因子のどちらか片方のみが 2 で割り切れる。

ア)　$x+y$ が 2 で割り切れる場合。

ア-1)　$x+y=2$ のとき。 $x=y=1\to(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2\times 5=10$ で 3 素数の積にならぬ。

ア-2)　$x+y=2(m^2+1), 2(m^4+1)$ のとき。 $a=x^2+2y^2+2xy, bc=x+y$ となるが、実際には $a>bc$ だから $a^2>bc$ である。よって

$$a=m^4+1=x^2+2y^2+2xy, bc=2(m^2+1)=x+y$$

m を消去して

$$x^2+2y^2+2xy=\left(\frac{x+y-2}{2}\right)^2+1\to 3x^2+7y^2+6xy+4x+4y=8$$

だが、左辺≧3+7+6+4+4=24 だから 8 に等しくはならない。解はない。

イ)　$x+y$ が 2 で割り切れない場合。 $x^2+2y^2+2xy\geq 5$ が 2 で割り切れるが、2 ではありえないので $bc=x^2+2y^2+2xy, a=x+y\neq 2$ である。いま $a^2<bc$ だから

$$a=m^2+1=x+y, bc=x^2+2y^2+2xy=2(m^4+1)\quad (*)$$

m を消去して

$$x^2+2y^2+2xy=2\{(x+y-1)^2+1\}\to x^2+2xy-4x-4y+4=0\quad ,$$

$$(2x-4)y+(x-2)^2=0\to(x-2)(2y+1)=0$$

$2y+1\geq 3$ より $x=2$ であり、また(*) より $y=m^2-1$

結局 $(x, y)=(2, m^2-1)$ (答)

【第3問】(1)　$F'(x)=f'(x)+f'(\pi-x)-f'(\pi+x)-f'(2\pi-x)$ だが、$f''(x)>0$ より

$f'(x)$ は単調増加なので、$f'(x)<f'(\pi+x), f'(\pi-x)<f'(2\pi-x)$ となり、

$$F'(x)<0\,(0\leq x\leq\pi)$$

この範囲で $F(x)$ は単調減少であり、しかも

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$$

だから $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $F(x)$ は最小値 $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ をとるから $F(x)\geq 0$ ■

(2)　$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において $F(x)\geq 0, \cos x\geq 0$ だから $\int_0^{\pi/2} F(x)\cos x\,dx\geq 0$

さて置換積分により

$$-\int_0^{\pi/2} f(\pi-x)\cos x\,dx=-\int_{\pi}^{\pi/2} f(\xi)\cos(\pi-\xi)(-1)\,d\xi=\int_{\pi/2}^{\pi} f(\xi)\cos\xi\,d\xi\quad,$$

$$-\int_0^{\pi/2} f(\pi+x)\cos x\,dx=-\int_{\pi}^{3\pi/2} f(\xi)\cos(\xi-\pi)\,d\xi=\int_{\pi}^{3\pi/2} f(\xi)\cos\xi\,d\xi\quad,$$

$$\int_0^{\pi/2} f(2\pi-x)\cos x\,dx=\int_{2\pi}^{3\pi/2} f(\xi)\cos(2\pi-\xi)(-1)\,d\xi=\int_{3\pi/2}^{2\pi} f(\xi)\cos\xi\,d\xi$$

だから

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\cos x dx+\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos x\,dx+\int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\geq 0\quad,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx\geq 0 \quad ■$$

(3)　$g(x)$ は微分可能だから連続、よって積分可能。そこで $G(x)=-\int_0^x g(t)dt$ とおく。

$$G'(x)=-g(x), G''(x)=-g'(x)>0$$

前問の結果が使えて

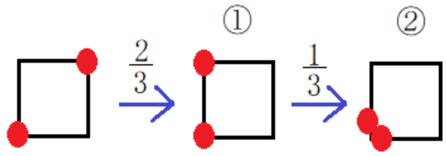
$$\int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx\geq 0$$

部分積分法により

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx=[-G(x)\sin x]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx=\int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx\geq 0 \quad ■$$

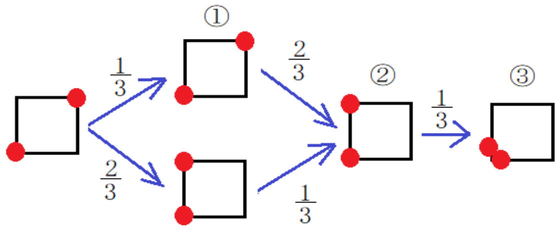
【第 4 問】(1) 2 回目でビンゴするには右図のようになればよい。その確率は

$$p_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\quad(答)$$



2 回目でビンゴするには右図のようになればよい。その確率は

$$p_3=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}\quad(答)$$

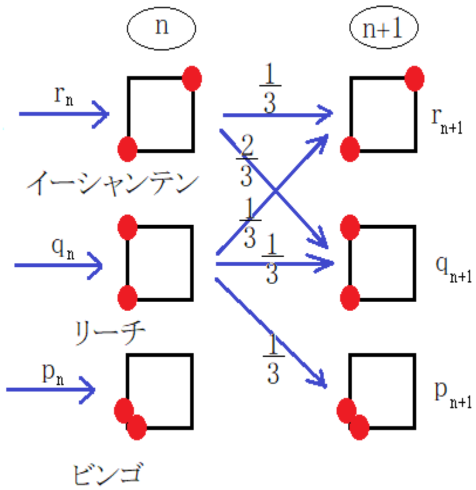


(2) n 回サイコロを振ってビンゴの 1 歩手前のリーチになる確率を q_n , さらにその 1 歩手前のイーシャンテンになる確率を q_n とする。右図から分かるように

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\quad,$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}r_n\quad,$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n\qquad\cdots\cdots(*)$$



(n>2 だと $p_n+q_n+r_n<1$ に注意。手前の段階でビンゴすることがあるから。) 第 2-3 式を変形して

$$q_{n+1}+a\,r_{n+1}=b(q_n+a\,r_n)$$

にしたい。そこで第 2-3 式をここに代入すると

$$\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}r_n+a\left(\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n\right)=b(q_n+a\,r_n)$$

係数比較して $1+a=3b\,,2+a=3ba\rightarrow a=\pm\sqrt{2},b=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{3}$

$$q_{n+1}+\sqrt{2}r_{n+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{3}(q_n+\sqrt{2}r_n)\rightarrow q_{n+1}+\sqrt{2}r_{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n(q_1+\sqrt{2}r_1)\quad,$$

$$q_{n+1}-\sqrt{2}r_{n+1}=\frac{1-\sqrt{2}}{3}(q_n-\sqrt{2}r_n)\rightarrow q_{n+1}-\sqrt{2}r_{n+1}=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n(q_1-\sqrt{2}r_1)$$

明らかに $q_1=\dfrac{2}{3},q_1=\dfrac{1}{3}$ だから、上式を足して 2 で割って

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2+\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n+\frac{2-\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^n\right\}(n\geq1)$$

実は n≧0 で成り立つ。インデックス(添字) を付け替えて

$$q_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{2+\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}+\frac{2-\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}(n\geq1)$$

(*) の第 1 式から

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}q_n=\frac{2+\sqrt{2}}{18}\times\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}+\frac{2-\sqrt{2}}{18}\times\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\quad(n\geq1)$$

また、インデックス(添字) を付け替えて

$$p_n=\frac{2+\sqrt{2}}{18}\times\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}+\frac{2-\sqrt{2}}{18}\times\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\quad(答)$$

(本来は n≧2 なのだが、n=1 を代入すると $p_1=0$ と符合するので、n≧1 で答は成り立つ。)

(3) ゲームを永久に続けるわけにはいかぬので、有限回で打ち切る。偶数回目で終わりにする場合と奇数回目で終わる場合がある。 $N=2N'$ で終わるときは

先手が勝つ確率= $p_1+p_3+\cdots+p_{2N'-1}=\sum_{m=1}^{N'} p_{2m-1}=\sum_{m=1}^{[(N+1)/2]} p_{2m-1}$ ①

後手が勝つ確率= $p_2+p_4+\cdots+p_{2N'}=\sum_{m=1}^{N'} p_{2m}=\sum_{m=1}^{[N/2]} p_{2m}$ ②

$N=2N'+1$ で終わるときは

先手が勝つ確率= $p_1+p_3+\cdots+p_{2N'+1}=\sum_{m=1}^{N'+1} p_{2m-1}=\sum_{m=1}^{[(N+1)/2]} p_{2m-1}$ ③

後手が勝つ確率= $p_2+p_4+\cdots+p_{2N'}=\sum_{m=1}^{N'} p_{2m}=\sum_{m=1}^{[N/2]} p_{2m}$ ②

問題は①<② と ③<② を証明することだが、後者だけ証明すればよい(①<③ だから)。

$$A=\frac{2+\sqrt{2}}{18}>0,\ \alpha=\frac{1+\sqrt{2}}{3},\ B=\frac{2-\sqrt{2}}{18}>0,\ \beta=\frac{1-\sqrt{2}}{3}$$

とおく。

②= $A(1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2N'-2})+B(1+\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2N'-2})=A\dfrac{\alpha^{N'}-1}{\alpha-1}+B\dfrac{\beta^{N'}-1}{\beta-1}$,

③= $A(0+\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2N'-1})+B(0+\beta+\beta^3+\cdots+\beta^{2N'-1})=A\dfrac{\alpha(\alpha^{N'}-1)}{\alpha-1}+B\dfrac{\beta(\beta^{N'}-1)}{\beta-1}$

よって

②−③= $A\dfrac{\alpha^{N'}-1}{\alpha-1}(1-\alpha)+B\dfrac{\beta^{N'}-1}{\beta-1}(1-\beta)=A(1-\alpha^{N'})+B(1-\beta^{N'})$

いま $N'\geq 1$ だから、 $0<\alpha<1\to 0<\alpha^{N'}<1,\ -1<\beta<1\to -1<\beta^{N'}<1$ となって

②−③ > $A\times 0+B\times 0=0$ ■