〔1〕 （配点 30 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{61}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

座標平面上の曲線 C_1 と C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = ax^n \ (x > 0)$$
$$C_2 : y = \log x \ (x > 0)$$

とする。ただし，n を 2 以上の整数，a を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき，$\log x < x$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 曲線 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a の条件を n を使って表せ。

(3) a が (2) で求めた条件を満たすとする。曲線 C_1 と C_2 の異なる 2 つの交点 P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とする。ただし $p < q$ とする。このとき，

$$p < \frac{q-p}{a(q^n - p^n)} < q$$

が成り立つことを証明せよ。

〔**2**〕（配点 30 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{62}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

自然数 n に対して定まる関数

$$f_n(x) = 1 - \sqrt{5}\left|\sin(2n\pi x)\right|$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) 任意の実数 x に対して $f_n(x) = f_n\left(x + \dfrac{k}{2n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ が成り立つことを示せ。

(2) 区間 $\left(\dfrac{k-1}{2n}, \dfrac{k}{2n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ において $f_n(x) = 0$ は相異なる 2 つの解を持つことを示せ。

(3) 区間 $[0,\ 1]$ における方程式 $f_n(x) = 0$ のすべての解の和を S_n とおくとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ。

〔**3**〕（配点 30 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{63}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔 問題 〕

正の定数 r に対して座標空間内の 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(r,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ r,\ 0)$ を定める。また，平面 $y=\dfrac{1}{2}r$ 上の点 C に対して，線分 AC の中点を P とする。ただし，点 C の z 座標は正である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q は線分 OB 上の点とする。定数 $a,\ c$ に対し，点 C を位置 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}r,\ c\right)$ に固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を最小とする点 Q の座標を求めよ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を求めよ。

(2) (1) で求めた点 Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $90°$ であることを示せ。

(3) 点 C は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を満たしながら動くとする。(1) で求めた点 Q と 3 点 O, C, P を頂点とする四面体の体積が最大となる点 C の座標と，そのときの四面体 OCPQ の体積を求めよ。

〔4〕 (配点 30 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{64}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔 問題 〕

直交座標で表された次の 2 つの方程式

$$|x| + |y| = c_1 \tag{A}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = c_2 \tag{B}$$

を定義する。ただし c_1，c_2 は正の定数である。

(1) xy 平面上に式 (A) を満たす $(x,\ y)$ を図示せよ。

(2) 極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて，式 (A)，(B) をそれぞれ極方程式で表せ。

(3) 原点を除く $(x,\ y)$ に対して $\dfrac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ の最大値および最小値を求めよ。

〔**5**〕（配点 30 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{65}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

以下の規則にしたがって数直線上を移動する点 A を考える。

(規則) 点 A が座標 x にあるとき，表が出る確率が $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ のコインを投げて，表が出たら x から $\dfrac{x}{2}$ へ移動し，裏が出たら x から $1-\dfrac{x}{2}$ へ移動する。

点 A がはじめに座標 0 にあるとして，事象「上記の規則を適用する操作を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した直後に点 A が座標 y にある」の確率を記号 $P_n(y)$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $P_1(y) > 0$ となる $y\ (0 \leqq y \leqq 1)$ とその確率 $P_1(y)$ の組をすべて答えよ。

(2) $y < 0$ または $y > 1$ のとき，$P_n(y) = 0$ であることを示せ。

(3) $P_n(1)$ を求めよ。

(4) k を自然数とするとき，以下のそれぞれの条件で $P_n(2^{-k})$ を求めよ。

① $n \leqq k$ のとき

② $n > k$ のとき