【第 1 問】(1)　$f(x)=x-\log x$　とおく。

$\lim_{x\to+0} f(x)=0-(-\infty)=\infty$　で

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

だから臨界点は　$x=1$　で、極小値=最小値は　$f(1)=1$

よって　$f(x)=x-\log x\geq 1$　なので　$x>\log x$　■

x	0	…	1	…
f ’		−	0	+
f	∞	↘	1	↗

(2)　$g(x)=ax^n-\log x$　の零点が 2 個ある条件を求める。

$\lim_{x\to+0} g(x)=0-(-\infty)=\infty$　で

$$g'(x)=nax^{n-1}-\frac{1}{x}=\frac{nax^n-1}{x}$$

だから臨界点は　$x^n=\dfrac{1}{na}$　より　$x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{na}}$

(　$a\leq 0$　のときは臨界点なし) だから、極小値=最小値は

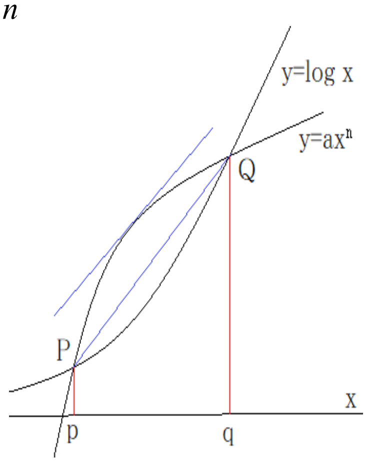
$$g\left(\frac{1}{\sqrt[n]{na}}\right)=a\cdot\frac{1}{na}+\frac{1}{n}\log(na)=\frac{1+\log(na)}{n},\ a>0$$

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt[n]{na}}$	…
g ’		−	0	+
g	∞	↘	負	↗

これが負になれば零点が 2 個にある。求めるべき条件は　$a>0$　かつ

$$\log(na)<-1 \Leftrightarrow \log a<-(1+\log n)\Leftrightarrow a<e^{-(1+\log n)}=e^{-\log(en)}=\frac{1}{en}$$

だから、　$0<a<\dfrac{1}{en}$　(答)



(3) 点 P, Q の y 座標はそれぞれ

$$P\cdots ap^n=\log p\quad ,$$
$$Q\cdots aq^n=\log q$$

である。線分 PQ の傾きは

$$\frac{aq^n-ap^n}{q-p}$$

だが、　$y=\log x,\ y'=\dfrac{1}{x}$　に平均値の定理を適用し、

$$\frac{aq^n-ap^n}{q-p}=\frac{1}{\xi},\ p<\xi<q$$

逆数をとれば

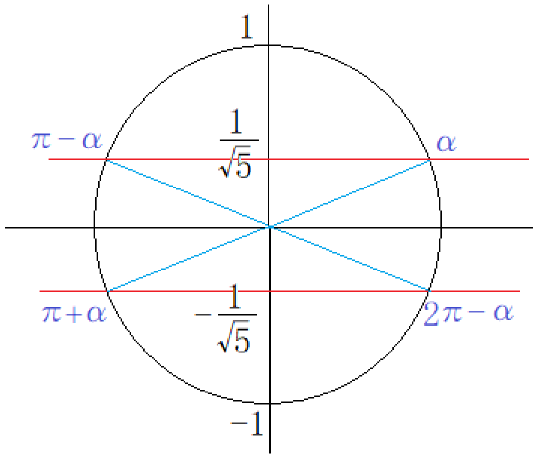
$$\xi=\frac{q-p}{a(q^n-p^n)}$$

だから

$$p<\frac{q-p}{a(q^n-p^n)}<q\quad ■$$

【第2問】(1)　$f_n(x+\frac{k}{2n})=1-\sqrt{5}\left|\sin(2n\pi(x+\frac{k}{2n}))\right|=1-\sqrt{5}|\sin(2n\pi x+k\pi)|$

$=1-\sqrt{5}|\pm\sin(2n\pi x)|=1-\sqrt{5}|\sin(2n\pi x)|=f_n(x)$　■



(2) 方程式　$\sin(2n\pi x)=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$　の解が

$\frac{k-1}{2n}<x<\frac{k}{2n}\Leftrightarrow(k-1)\pi<2n\pi x<2k\pi$

の範囲内に何個あるかであるが、単位円周の上半分、または下半分において縦座標が　$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$　の点が何個あるかという問題に翻訳される。右図より2個あることが分かる。■

(3) 半円より全円の方が考えやすいので、[0,1]を2n等分でなく、n等分する。

n個の開区間の合併　$(\frac{0}{2n},\frac{2}{2n})+(\frac{2}{2n},\frac{4}{2n})+(\frac{4}{2n},\frac{6}{2n})+\cdots+(\frac{2n-2}{2n},\frac{2n}{2n})$　において、解の総和を求める。1つの開区間には(2)のときの倍の4個の解がある。

第m区間　$(m=0,1,2,\cdots,n-1)$　は

$$x\in(\frac{2m}{2n},\frac{2m+2}{2n})\ \Leftrightarrow\ 2n\pi x\in(2m\pi,(2m+2)\pi)$$

のことである。　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},0<\alpha<\frac{\pi}{2}$　なる　α　を使って、この区間内の解を表現すると

$$2n\pi x=\alpha+2m\pi,(\pi-\alpha)+2m\pi,(\pi+\alpha)+2m\pi,(2\pi-\alpha)+2m\pi\quad\text{(上図参照)},$$

$$x=\frac{\alpha}{2n\pi}+\frac{m}{n},(\frac{1}{2n}-\frac{\alpha}{2n\pi})+\frac{m}{n},(\frac{1}{2n}+\frac{\alpha}{2n\pi})+\frac{m}{n},(\frac{2}{2n}-\frac{\alpha}{2n\pi})+\frac{m}{n}$$

これら4つの解を小計すると

$$\frac{\alpha}{2n\pi}+(\frac{1}{2n}-\frac{\alpha}{2n\pi})+(\frac{1}{2n}+\frac{\alpha}{2n\pi})+(\frac{2}{2n}-\frac{\alpha}{2n\pi})+\frac{4m}{n}=\frac{4m+2}{n}$$

この小計を　$m=0,1,2,\cdots,n-1$　にわたって総計すれば

$$S_n=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{4m+2}{n}=\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2}{n}\cdot n=2n$$

したがって

$$\lim\frac{S_n}{n}=\lim\frac{2n}{n}=\lim 2=2\quad\text{(答)}$$

【第 3 問】(1) 定点 P は $P=(\frac{r+a}{2},\frac{r}{4},\frac{c}{2})$ で、動点 Q は $Q=(0,rt,0),0\leq t\leq 1$ だから

$$\vec{PQ}=(-\frac{r+a}{2},rt-\frac{r}{4},-\frac{c}{2})$$

よって

$$|\vec{PQ}|^2=(\frac{r+a}{2})^2+r^2(t-\frac{1}{4})^2+(\frac{c}{2})^2$$

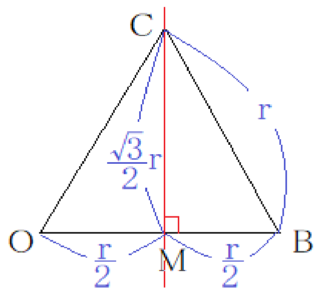
ここで変数は t (それ以外は定数) だから、 $t=\frac{1}{4}$ のとき最小。このとき

$$Q=(0,\frac{r}{4},0)\quad,\quad |\vec{PQ}|=\sqrt{(\frac{r+a}{2})^2+(\frac{c}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(r+a)^2+c^2}\quad \text{(答)}$$

(2) ここからは Q は定点となる。 $\vec{PQ}=(-\frac{r+a}{2},0,-\frac{c}{2})$, $\vec{OQ}=(0,\frac{r}{4},0)$ だから

$$\vec{PQ}\cdot\vec{OQ}=-\frac{r+a}{2}\times 0+0\times\frac{r}{4}-\frac{c}{2}\times 0=0$$

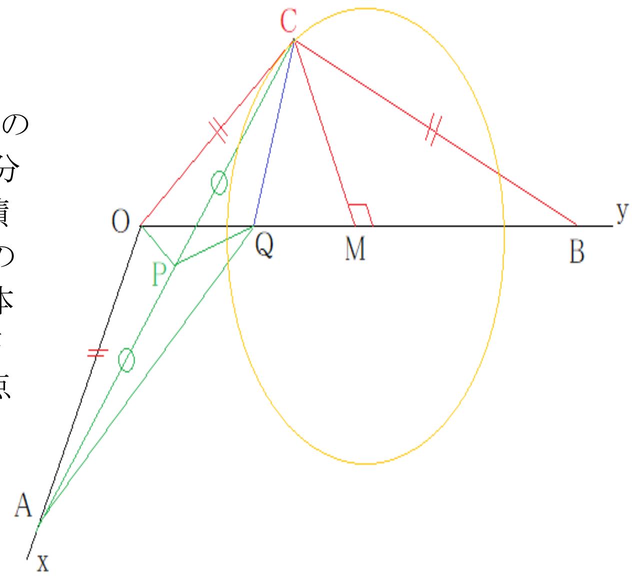
よって直交する。■



(3) 分かりにくい問題文だが、ここでは a, c は変数になる。
点 C はある平面上の点であったが、それは線分 OB の垂直二等分面である。しかも BC=OA=r であるから、OB の中点を M とすれば、C は M が中心で半径が $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ の円周上にある。(図参照)

四面体 OCPQ を膨らませて、三角錐 C-OAQ を考え、そこから三角錐 P-OAQ を差し引けばよい。
底面の△OAQ の面積は共通で

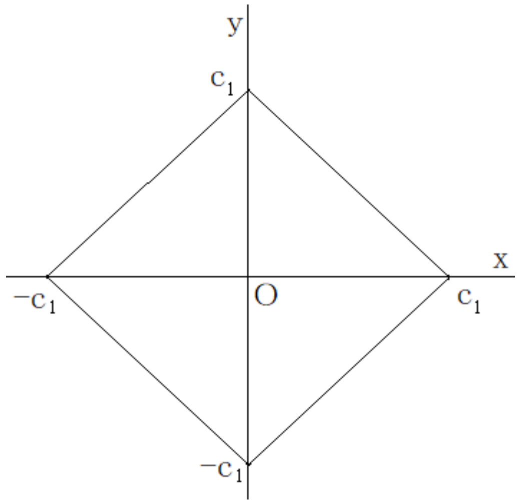
$$\frac{1}{2}\times OA\times OQ=\frac{1}{2}r\cdot\frac{r}{4}=\frac{r^2}{8}\quad,$$



C-OAQ の高さは C から xy 平面に下した垂線の長さに等しく、P-OAQ の高さはそれのちょうど半分である。よって、P-OAQ の体積は C-OAQ の体積の半分である。四面体 OCPQ の体積はこの2つの体積の差に等しいから、その体積は C-OAQ の体積の半分だ。さて、この体積が最大になるのは高さが最大のときだから、それは点 C が円の最高点 (偏角が 90 度)に達したときで、そのときの高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ である。したがって求めべき体積は

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{r^2}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}r\div 2=\frac{\sqrt{3}}{96}r^3\quad \text{(答)}$$

【問題 4】(1) 第 1 象限で $x+y=c_1$ のグラフを描いて、それを座標軸で折り返せばよい。なぜなら $|x|+|y|=c_1$ が成り立てば $|-x|+|y|=c_1$ や $|x|+|-y|=c_1$ も成り立つからである。



(2) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を代入すればよい。前者は $|r\cos\theta|+|r\sin\theta|=c_1$ より

$$A: r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)=c_1$$ (答),

後者は $\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=c_2$ より

$$B: r=c_2$$ (答)

(3) 第 1 象限だけ考えればよい。極座標で与式を表現すれば

$$\frac{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}{r}=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}), 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

だから最大値は

$$\sqrt{2}(\theta=\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$$ (答),

最小値は $\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$ より

$$1(\theta=0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi)$$ (答)

【第 5 問】(1) n=1 だから、表なら x=0 → 0, 裏なら x=0 → 1 であるから

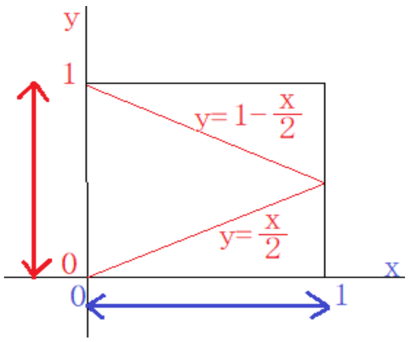
$y=0, P_1(0)=\alpha$,

$y=1, P_1(1)=1-\alpha$ (答)

(2) 数学的帰納法で証明する。

I) n=1 のとき。前問から分かるように、1 回コインを投げた後の点 A の在りかは $y=0$ または $y=1$ である。よって $y<0 \vee y>1$ が起こることはありえず、その実現確率は $P_1(y)=0$

II) n のとき命題が成り立つ、すなわち $x<0 \vee x>1$ の実現確率が $P_n(x)=0$ であると仮定する。



n 回投げた後では点 A は $0 \le x \le 1$ の範囲内にしかありえない。n+1 回目で点 A は $y=\frac{x}{2} \vee y=1-\frac{x}{2}$ なる y に移動している。右図から分かるように y は $0 \le y \le 1$ の範囲内に落ちる。つまり $y<0 \vee y>1$ の実現確率は $P_{n+1}(y)=0$

これで n+1 のときにも命題が成り立つことが示せた。■

(3) n 回目に点 A が $y=1$ なる位置にある確率を求めよう。

上図のグラフを読み取れば、これは n-1 回目には点 A が $x=0$ なる位置にいるしかないと分かる。n-2 回目も $x=0$ にあるしかなく、これは初回から n-1 回目まで原点にジッとして動かなかったことを意味する。結局、点 A の動き方は

(0) → 0 → 0 → …… → 0 → 1

だから、求めるべき確率は $\alpha^{n-1}(1-\alpha)$ (答)

(4) いま点 A が $0<\frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2}$ の位置にいたら、1 回前はどこにいたのだろうか。移動の式 $y=\frac{x}{2} \vee y=1-\frac{x}{2}$ から逆算すれば $x=2y \vee x=2-2y$ だが、(2) より $0 \le x \le 1$ だから後者の逆算式はありえない。したがって

$$\rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2^2} \rightarrow \frac{1}{2^3} \rightarrow \cdots \rightarrow \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow \frac{1}{2^k}$$

のように変化する。 $\frac{1}{2^k}$ に到達するには少なくても $k+1$ 回コインを投げなくてはならない。

① $n<k+1$ のときは問題の位置に点 A を実現することは能わず、 $P_n(\frac{1}{2^k})=0$ (答)

② 初め $n-(k+1)$ は原点に居続けて時間稼ぎをし、残りの $k+1$ 回で一気に目的地を目指す。だからその確率は

$\rightarrow \cdots \rightarrow 0$ の変化の確率が α^{n-k-1} ,

$(0) \rightarrow 1$ の変化の確率が $1-\alpha$,

$(1) \rightarrow \frac{1}{2}$ の変化の確率が $\alpha+(1-\alpha)=1$,

$(\frac{1}{2}) \rightarrow \frac{1}{2^2} \rightarrow \frac{1}{2^3} \rightarrow \cdots \rightarrow \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow \frac{1}{2^k}$ の変化の確率が α^{k-1}

積の法則により求めるべき確率は

$$P_n(\frac{1}{2^k})=\alpha^{n-k-1} \times (1-\alpha) \times 1 \times \alpha^{k-1}=\alpha^{n-2}(1-\alpha) \quad (答)$$