1

(30 点)

a, b は実数で，$a > 0$ とする．z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \qquad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a, b と$(*)$の 3 つの解を求めよ．

2

(30 点)

p を正の整数とする．α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の 2 つの解で，$|\alpha| > 1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n + \beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$ を求めよ．

3

(35 点)

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X, Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

4 (35 点)

正の整数 a に対して，

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．

m, n は整数で，次の条件を満たすとする．

(i)　$1 \leqq m \leqq 30$.

(ii)　$1 \leqq n \leqq 30$.

(iii)　n は 3 で割り切れない．

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ．

5 (35 点)

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6 (35 点)

x, y, z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

問題は，このページで終わりである．