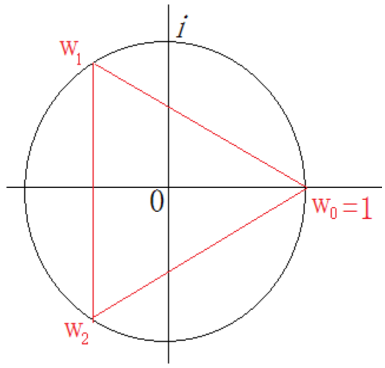
【第 1 問】



方程式　$w^3=1$　の解 (1 の立方根) は

$$w_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}(k=0,1,2)=1,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

だが、図示すると 1 辺が　$\sqrt{3}$　の正三角形になる。(右図)

原点を中心に　a　倍に相似拡大し、一定角だけ回転するために

複素数　ϵ　倍し、平行移動するために複素数　δ　を足す。それを

$$z=\epsilon w+\delta,|\epsilon|=a$$

とおく。　$w=\frac{z-\delta}{\epsilon}$　と変形して先の方程式に代入すれば

$$\left(\frac{z-\delta}{\epsilon}\right)^3=1\to z^3-3\delta z^2+3\delta^2 z-\delta^3-\epsilon^3=0$$

これと所与の方程式と係数比較して

$$a=-\delta,b=3\delta^2,\delta^3+\epsilon^3=-1$$

$\epsilon^3=-\delta^3-1=-(-a)^3-1=a^3-1$　これの絶対値を取って　$|\epsilon^3|=a^3=|a^3-1|\to a^3=\pm(a^3-1)$　,

$a^3=a^3-1,a^3=-a^3+1$　だが前者はありえず　$2a^3=1\to a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　(答)

$b=3\delta^2=3\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$　(答)

したがって

$$\delta=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\epsilon^3=-1-\delta^3=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

となり、ここに　$\epsilon^3=-\frac{1}{2}$　(　$\epsilon^3=-\frac{1}{2}$　の立方根) という冒頭の方程式によく似た方程式が出てきた。

その解は　$\epsilon_0=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　とそれを 120°, 240° 回転した　$\epsilon_1=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}w_1,\epsilon_2=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}w_2$　である。

結局、求めるべき解は

$$z_k=\epsilon_j w_k+\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}w_{j+k}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\times1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$=-\sqrt[3]{4},\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2\sqrt[3]{2}}$$　(答)

【第 2 問】(1) 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2p, \alpha\beta=-1$　だから、

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2=2(2p^2+1)\quad,$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=4p(2p^2+1)+2p=2p(4p^2+3)$$

ここまで偶数である。これ以降は数学的帰納法を使う。　$k<n$　なるすべての　k　について　$\alpha^k+\beta^k$　が偶数であるとしてみる。

$$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha+\beta)-\alpha^{n-1}\beta-\alpha\beta^{n-1}$$
$$=(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$$
$$=2m\times 2p+2m'=2(2mp+m')$$

で、　$k=n$　のときも偶数である。

$k=1$　のときと　$k=2$　のときに偶数だったから、これですべての正の整数　k　について、所与の値は偶数である。

(2)　$\alpha^n+\beta^n=2M$　(偶数) が分かったから、　$\sin(\alpha^n\pi)=\sin(2M-\beta^n)\pi=-\sin(\beta^n\pi)$　である。ところで所与の 2 次方程式を解いて

$$\alpha=p+\sqrt{p^2+1}>p+p=2p>1, |\alpha|>1\quad,$$
$$\beta=p-\sqrt{p^2+1}=\frac{-1}{p+\sqrt{p^2+1}}=\frac{-1}{\alpha}, |\beta|<1$$

である。したがって

$$(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=(-1)^{n+1}\alpha^n\sin(\beta^n\pi)=(-1)^{n+1}(\alpha\beta)^n\pi\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}=(-1)^{2n+1}\pi\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}$$

ここで　$n\to\infty$　とすれば　$\beta^n\pi\to\infty$　だから

$$\lim(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=(-1)\pi\times 1=-\pi\quad\text{(答)}$$

【第 3 問】公式　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$　から

$$\cos\angle AOB=\cos\angle COD=\frac{1}{2},\cos\angle AOC=\cos\angle BOC=-\frac{\sqrt{6}}{4},\cos\angle AOD=\cos\angle BOD=k>0$$

である。この 6 つの角のうち、最後の 2 つが鋭角であることに注目。(ここが重要。)

また　$\angle AOB=\angle COD=60^\circ$　だから　$\triangle AOB,\triangle COD$　は 1 辺 1 の正三角形。(　$AB=CD=1$　)

次に、余弦定理　$|\vec{AB}|^2=|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2-2|\vec{OA}||\vec{OB}|\cos\angle AOB=|\vec{OA}|^2+|\vec{OB}|^2-2|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|$　より

$$AC^2=BC^2=1+1-2\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{4+\sqrt{6}}{2}\quad,\quad AD^2=BD^2=2-2k$$　である。

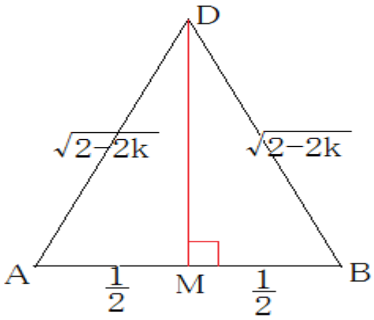
さて AB の中点を M とする。

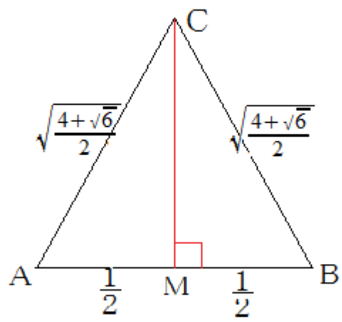
二等辺三角形　$\triangle ABD$　において、頂角から下した垂線の長さは(下の左図)

$$DM=\sqrt{(2-2k)-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7-8k}}{2}$$

二等辺三角形　$\triangle ABC$　において、頂角から下した垂線の長さは(下の右図)

$$CM=\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}{2}$$





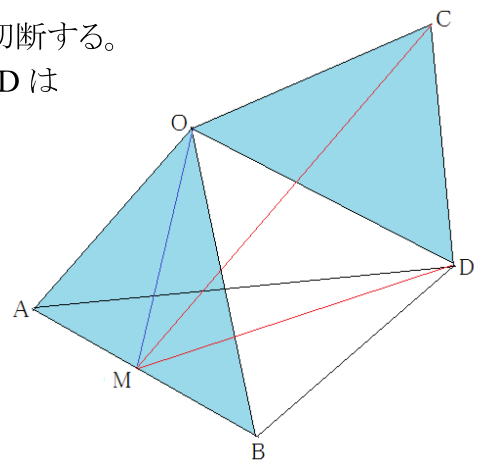
今度は四面体を点 M を通って AB に垂直な平面　π　で切断する。
(右図で水色に塗った三角形は正三角形) このとき 2 点 C, D は
平面　π　上にある。なぜなら　$\vec{MC},\vec{MD}$　は AB に垂直
だからである。実際

$$\vec{AB}\cdot\vec{MC}=(\vec{OB}-\vec{OA})\cdot\left(\vec{OC}-\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})\right)$$

$$=(\vec{OB}-\vec{OA})\cdot\vec{OC}-\frac{1}{2}\left(|\vec{OB}|^2-|\vec{OA}|^2\right)=0\quad,$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{MD}=(\vec{OB}-\vec{OA})\cdot\left(\vec{OD}-\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})\right)$$

$$=(\vec{OB}-\vec{OA})\cdot\vec{OD}-\frac{1}{2}\left(|\vec{OB}|^2-|\vec{OA}|^2\right)=0$$



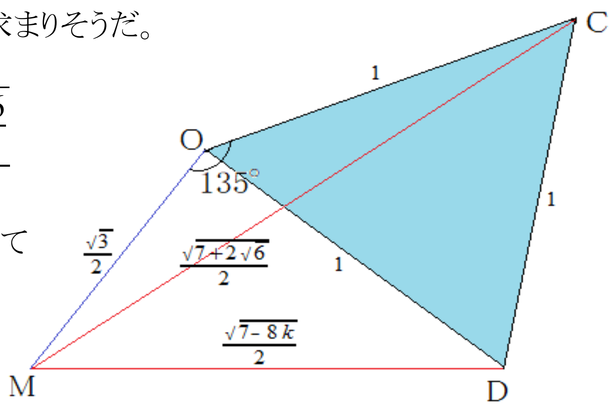
となる。断面図は右図で、∠MOD が分れば k が求まりそうだ。
そこでまず

$$\cos\angle MOC=\frac{OM^2+OC^2-CM^2}{2OM\cdot OC}=\frac{\frac{3}{4}+1-\frac{7+2\sqrt{6}}{4}}{2\times\sqrt{3}/2\times 1}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\to\angle MOC=135^\circ$$　で、そこから 60°を引いて

∠MOD=75°である。△OMD に余弦定理を使う。

$\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　に注意して



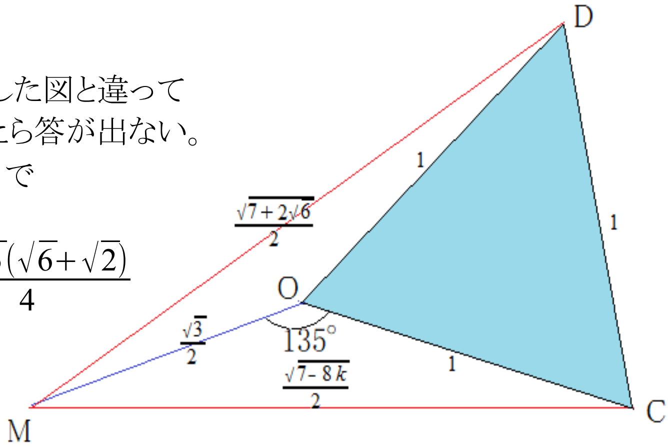
$$\frac{7-8k}{4}=\frac{3}{4}+1-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{7-\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}\to k=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}\quad \text{(答)}$$

【蛇足】四面体の見取り図を描くときに、上述した図と違って右図のように 2 点 C, D の位置関係が逆だったら答が出ない。
なぜなら、この場合は　$360-(135+60)=175$　で
∠MOD=175°だから

$$\frac{7-8k}{4}=\frac{3}{4}+1+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{7+\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

$$\to k=-\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$$

となる。k は正だったからダメである。



実は　$\vec{OM}\cdot\vec{OD}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})\cdot\vec{OD}=k>0$　だから∠MOD は鋭角だ。(175°でなく 75°の方だ。)

【第 4 問】mod.3 の世界で考える。 $n\equiv 0,1,2$ に対し $n^2\equiv 0,1,1$ であり $n^3\equiv 0,1,2$ である。また $n^2+n\equiv 0,2,0$ である。

m \ n	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	1
2	2	1	2

$m^3+n^2+n+3 (mod.3)$ の値が m, n の値によってどう変わるかを示せば右表のようになる。表中、0 の所だけを調べればよい。

(ア) $m\equiv 0, n\equiv 0$ のとき ⇒(iii) より (イ)に飛ぶ。

$m=3m'(1\leq m'\leq 10), n=3n'(1\leq n'\leq 10)$ とおいて

$a=m^3+n^2+n+3=27m'^3+9n'^2+3n'+3=3(9m'^3+3n'^2+n'+1)$

素因数 3 の指数を大きくするため $n'=3n''-1 (1\leq n''\leq 3)$ とおく。

カッコ内は $9m'^3+3(3n''-1)^2+3n'=3(3m'^3+9n''^2-6n''+1)$

今度のカッコ内は 3 の素因数を持たない。結局

$$a=3^2(3m'^3+9n''^2-6n''+1)\rightarrow B(a)=2$$

(イ) $m\equiv 0, n\equiv 2$ のとき

$m=3m'(1\leq m'\leq 10), n=3n'-1(1\leq n'\leq 10)$ とおいて

$a=27m'^3+(3n'-1)^2+(3n'-1)+3=27m'^3+9n'^2-3n'+3=3(9m'^3+3n'^2-n'+1)$

$n'=3n''+1(0\leq n''\leq 3)$ とおくと、カッコ内は

$9m'^3+3(3n''+1)^2-3n''=3(3m'^3+9n''^2+5n''+1)$

今度のカッコ内を 3 の倍数にするには $n''=1, 5n''+1=6$ とするしかない。このとき

$3(3m'^3+9\cdot 1^2+6)=3^2(m'^2+5)$ だから $a=3^3(m'^3+5)$ となるが、これのカッコ内も 3 の倍数にするために $m'\equiv 1\rightarrow m'=1,4,7,10$ とすれば

$$a=3^3\times(1+5)=3^4\times 2, 3^3\times(64+5)=3^4\times 23, 3^3\times(343+5)=3^4\times 116, 3^3\times(1000+5)=3^4\times 335$$

でいずれも $B(a)=4$

(ウ) $m\equiv 1, n\equiv 1$ のとき

$m=3m'+1(0\leq m'\leq 9), n=3n'+1(1\leq n'\leq 9)$ とおいて

$a=(3m'+1)^3+(3n'+1)^2+(3n'+1)+3=27m'^3+27m'^2+9m'+9n'^2+9n'+6$

$=3(9m'^3+9m'^2+3m'+3n'^2+3n'+2)$

もはやカッコ内は 3 で割り切れない。よって $B(a)=1$

上記(ア),(イ),(ス) を総合して B の最大値は(イ) の B=4 である。(答)

(イ) で B=4 になるのは、 $m=3m'$, $m'=1,4,7,10$ であり、かつ $n=3n'-1$, $n'=3n''+1$, $n''=1$ だから

$$(m, n)=(3,11),(12,11),(21,11),(30,11) \quad (答)$$

【蛇足】前提条件(iii) は不要である。

【第 5 問】1 行目に「1,2,3,4」を並べる方法が　$4!=24$　通りある。いま 1 行目を並べ終わったとしよう。このあとどうするかで 3 つに場合分けする。

(ア) 1 列目も 1 行目と同じ順列にする場合。例えば 1 行目に「1234」になら、1 列目も「1234」である。下の例を使って、さらに 3 つに場合分けする。

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4		
4	3		

1	2	3	4
2	3		
3			
4			

1	2	3	4
2	4		
3			
4			

(ア-1) 第 2 行第 2 列が「1」のとき、上図(左)。このあと青字部分が自動的に決まる。残った 4 マスで「1, 2; 2, 1」か「2, 1; 1, 2」の 2 通りの任意性が生じる。

(ア-2) 第 2 行第 2 列が「3」のとき、上図(中)。このあとすべて自動的に決まる。1 通り。

(ア-3) 第 2 行第 2 列が「4」のとき、上図(右)。(ア-2) と同様。

以上、(ア) の場合は全部で　$4!\times(2+1+1)=4!\times4$　通り。

(イ) 1 列目が 1 行目のどれか 2 文字を交換した順列の場合。第 1 行第 1 列の要素は動かせないから、例えば「1234」→「1243」である。交換するだけで　${}_3C_2=3$　通りの任意性が生じる。

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3		
3	4		

1	2	3	4
2	3		
4			
3			

1	2	3	4
2	4		
4			
3			

(イ-1) 第 2 行第 2 列が「1」のとき、上図(左)。このあと青字部分が自動的に決まる。残った 4 マスで「1, 2; 2, 1」か「2, 1; 1, 2」の 2 通りの任意性が生じる。

(イ-2) 第 2 行第 2 列が「3」のとき、上図(中)。このあとすべて自動的に決まる。1 通り。

(イ-3) 第 2 行第 2 列が「4」のとき、上図(右)。(イ-2) と同様。

以上、(イ) の場合は全部で　$4!\times{}_3C_2\times(2+1+1)=4!\times12$　通り。

(ウ) 1 列目が 1 行目の 2 文字目以降を輪環の順に回した順列の場合。例えば「1234」→「1342」または→「1423」で、2 通りの任意性が生じる。

1	2	3	4
3	1		
4			
2			

1	2	3	4
3	4		
4	1		
2			

1	2	3	4
3	4		
4	3		
2	1	4	3

(ウ-1) 第 2 行第 2 列が「1」のとき、上図(左)。このあとすべて自動的に決まる。1 通り。

(ウ-2) 第 2 行第 2 列が「4」で、第 3 行第 2 列が「1」のとき、上図(中)。このあと 1 通り。

(ウ-3) 第 2 行第 2 列が「4」で、第 3 行第 2 列が「3」のとき、上図(右)。このあと緑字部分が自動的に決まる。残った 4 マスで「1, 2; 2, 1」か「2, 1; 1, 2」の 2 通りの任意性が生じる。

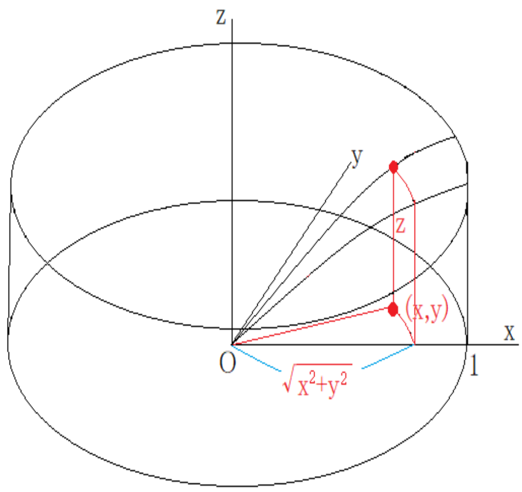
以上、(ウ) の場合は全部で　$4!\times2\times(1+1+2)=4!\times8$　通り。

総計、　$4!\times(4+12+8)=24\times24=576$　通り(答)

【第６問】曲面Ｓの方程式　$z=f(x,y)$　を求めよう。
　xy　平面上の点　(x,y)　から垂線を立ててＳと交わった点までの高さ　z　は、原点からの距離　$\sqrt{x^2+y^2}$　を半径として　$z=\sqrt{\log(1+x)}$　のグラフをぶん回したものであるから

$$z=\sqrt{\log(1+\sqrt{x^2+y^2})}$$

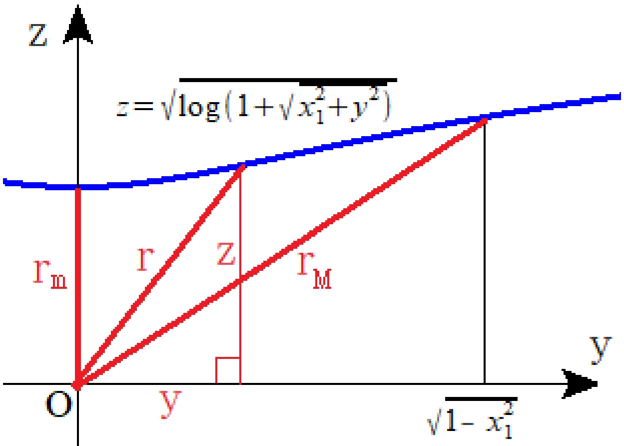
が曲面Ｓの方程式である。



次に、曲面Ｓを　x　軸に垂直な平面　$x=x_1$　で切断したときの切り口の図形を考えよう。　$x=x_1$　を代入、

$$z=\sqrt{\log(1+\sqrt{x_1^2+y^2})},\ 0\leq y\leq\sqrt{1-x_1^2}$$

下図のようになる。



　x　軸の周りに回転して立体Ｖを作るのだが、体積を求めるにあたって　x　軸からＳまでの距離の２乗　r^2　を積分することになる。

$$r^2=y^2+z^2=y^2+\log(1+\sqrt{x_1^2+y^2}),\ 0\leq y\leq\sqrt{1-x_1^2}$$

だが、　r^2　は　y　についての増加関数だからその最大値と最小値はそれぞれ

$$r_M^2=(\sqrt{1-x_1^2})^2+\log(1+\sqrt{x_1^2+(\sqrt{1-x_1^2})^2})=1-x_1^2+\log 2\quad ,$$
$$r_m^2=0^2+\log(1+\sqrt{x_1^2+0^2})=\log(1+x_1)$$

である。回転体は中空型だから、外側の大きめの体積から空洞部分の体積を引けばよい。よって

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^1(1-x^2+\log 2)\,dx-\pi\int_0^1\log(1+x)\,dx$$

となる。部分積分だけ先に計算しておくと

$$\int\log(1+x)\,dx=x\log(1+x)-\int\frac{x}{1+x}dx=x\log(1+x)-\int(1-\frac{1}{1+x})dx=(1+x)\log(1+x)-x+C$$

だから

$$\frac{V}{2}=\pi\left[(1+\log 2)x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\pi\left[(1+x)\log(1+x)-x\right]_0^1$$
$$=\pi(1+\log 2-\frac{1}{3})-\pi(2\log 2-1)=\pi(\frac{5}{3}-\log 2)$$

したがって求めるべき体積は

$$V=2\pi(\frac{5}{3}-\log 2)\quad (答)$$