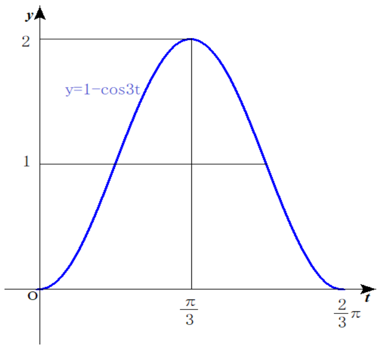
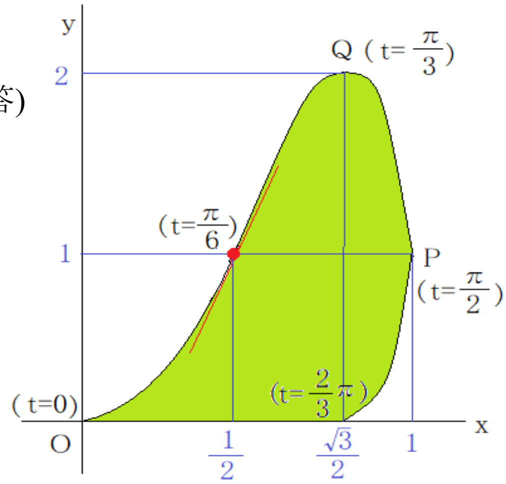
【1】(問 1) x 最大は $t=\dfrac{\pi}{2}, P(1,1)$ (答)

y 最大は下のグラフから分かるように $t=\dfrac{\pi}{3}, Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ (答)





(問 2) $x-\sin t=\dfrac{1}{2} \to t=\dfrac{\pi}{6}$ だから傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3\sin 3t}{\cos t}$ より $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/6}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$

接線の方程式は

$$y-1=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad (答)$$

(問 3) $S=\int_{t=0}^{2/3\pi} y\,dx=\int_0^{2/3\pi} y\dfrac{dx}{dt}dt=\int_0^{2/3\pi}(1-\cos 3t)\cos t\,dt=\int_0^{2/3\pi}\cos t\,dt-\int_0^{2/3\pi}\cos 3t\cos t\,dt$

ところで積を和差に直す公式で

$$\cos 3t\cos t=\frac{1}{2}(\cos 4t+\cos 2t)$$

だから

$$S=[\sin t]_0^{2/3\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2/3\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2/3\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{9}{16}\sqrt{3} \quad (答)$$

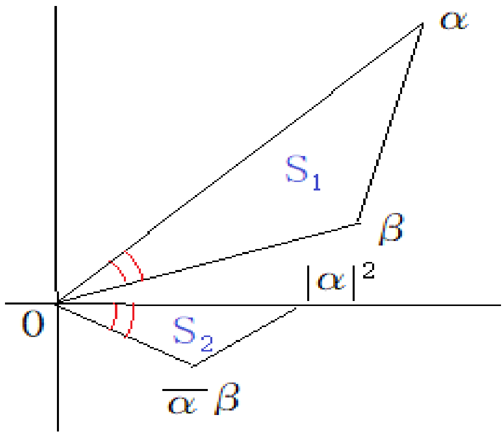
【2】(問 1) 複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の偏角を $\theta=Arg(z)$ と表すことにする。

$$S_1=\frac{1}{2}|\alpha||\beta|\times\sin\left|Arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| \ ,$$

$$S_2=\frac{1}{2}|\alpha|^2|\bar{\alpha}\beta|\times\sin\left|Arg\left(\frac{|\alpha|^2}{\bar{\alpha}\beta}\right)\right|=\frac{1}{2}|\alpha|^3|\beta|\times\sin\left|Arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|$$

より

$$\frac{S_2}{S_1}=|\alpha|^2 \quad (答)$$



(問 2) 面積 S_2 は底辺×高さ÷2 で

$$S_2=\frac{1}{2}|\alpha|^2|Im(\bar{\alpha}\beta)|$$

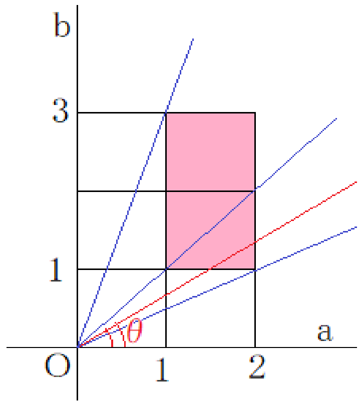
だから前問の答を使って

$$S_1=\frac{S_2}{|\alpha|^2}=\frac{1}{2}|Im(\bar{\alpha}\beta)| \quad ■$$

(問 3) 前問の答より

$$S_1=\frac{1}{2}\left|Im\left(\bar{z}\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|Im\left(\frac{\bar{z}^2}{|z|^2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|Im\left(\frac{(a^2-b^2)-2abi}{a^2+b^2}\right)\right|=\frac{|ab|}{a^2+b^2}=\frac{ab}{a^2+b^2}$$

これの最大・最小を右図のピンク部分の範囲で考える。



直線 $b=\tan\theta\cdot a$ とぶつければよい。

$$S_1=\frac{a\times\tan\theta\cdot a}{a^2+\tan^2\theta\cdot a^2}=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

だが、 θ の動く範囲は

$$(a,b)=(2,1),\ \tan\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin 2\theta=\frac{4}{5}$$

から

$$(a,b)=(1,3),\ \tan\theta=3,\ \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin 2\theta=\frac{3}{5}$$

までの間である。だから、 S_1 の最大値・最小値は

最大値: $\theta=\frac{\pi}{4},\ \tan\theta=1,\ b=a$ のとき $S_1=\frac{1}{2}$ (答)

最小値: $(a,b)=(1,3)$ のとき $S_1=\frac{3}{10}$ (答)

【3】(問 1) mod.5 で考える。

$$x\equiv 0 \Rightarrow x^2\equiv 0 \quad ,$$
$$x\equiv 1 \Rightarrow x^2\equiv 1 \quad ,$$
$$x\equiv 2 \Rightarrow x^2\equiv 4 \quad ,$$
$$x\equiv 3 \Rightarrow x^2\equiv 9\equiv 4 \quad ,$$
$$x\equiv 4 \Rightarrow x^2\equiv 16\equiv 1 \quad . \quad \blacksquare$$

ついでながら、 $x^2\equiv 0(mod.5)$ ならば $x\equiv 0(mod.5)$ であることが分かる。

(問 2) $x^2=2z^2-5y^2$ より $x^2\equiv 2z^2(mod.5)$ だが、前問より左辺は $x^2\equiv 0,1,4$ で、右辺は $2z^2\equiv 0,2,3$ だから両辺は 0 に合同になるしかない。よって $x\equiv z\equiv 0(mod.5)$

そこで $x=5x', z-5z'$ とおけば

$$25x'^2+5y^2=50z'^2 \quad \Rightarrow \quad 5x'^2+y^2=10z'^2$$

$y^2=10z'^2-5x'^2\equiv 0(mod.5)$ より $y\equiv 0(mod.5)$. そこで $y=5y'$ とおけば

$$5x'^2+25y'^2=10z'^2 \quad \Rightarrow \quad x'^2+5y'^2=2z'^2$$

この最後の方程式は問題に与えられた方程式 $x^2+5y^2=2z^2$ と形が同じで、違いは変数が

$$(x,y,z) \text{ から } (x',y',z')=\frac{1}{5}(x,y,z) \text{ へ}$$

小さく変わっただけだ。自然数は 1 が最小だから、この変化が永久に続くことはありえない。したがって与方程式を満たす自然数はもとから存在していないことになる。■

【4】(問 1) x を固定する。その x に対し条件を満たす y が P_x 個あるとすると

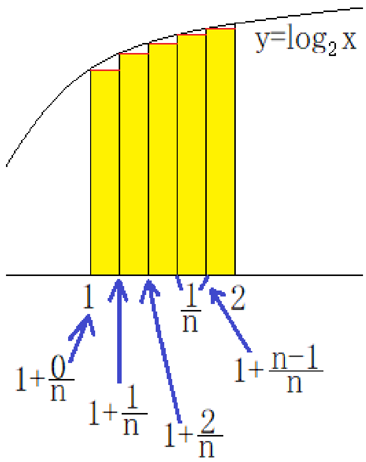
$$\log_2 1 < y\log_2 2 < n\log_2(1+\frac{x}{n}) \to 0 < y < n\log_2(1+\frac{x}{n})$$

より、

$$n\log_2(1+\frac{x}{n})-1 \leq P_x < n\log_2(1+\frac{x}{n})$$

である。等号が成立するのは $n\log_2(1+\frac{x}{n})$ が整数値のときである。よって、x について総和して

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{n\log_2(1+\frac{k}{n})-1\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2(1+\frac{k}{n}) \quad ■$$



(問 2) n^2 で割って

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n})-\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{P(n)}{n^2} < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n}) \quad (*)$$

ところでシグマの部分の極限は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n})$$

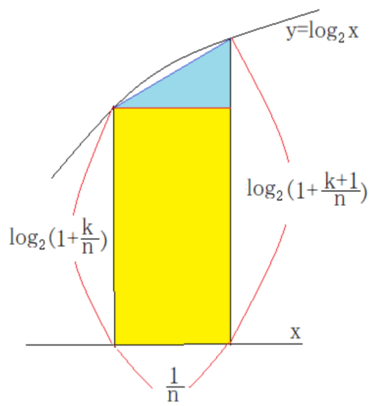
$$=\int_1^2 \log_2 x\,dx = [x\log_2 x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\log 2}dx$$

$$=2-\frac{1}{\log 2}$$

(*) において極限をとれば

$$2-\frac{1}{\log 2}-\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2} \leq 2-\frac{1}{\log 2} \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2} = 2-\frac{1}{\log 2} \quad (答)$$



(問 3) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n})$ は上図の黄色部分の面積であって、不足和である。すなわち

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n}) < \int_1^2 \log_2 x\,dx = L \quad .$$

$y=\log_2 x$ は $y''=-\frac{1}{x^2\log 2}<0$ より上に凸だから、台形(右図では黄色＋水色に相当)で近似しても不足和には違いないが、先の Σ (黄色)よりはよい近似が得られる。水色の分だけ近似がよくなるが、水色の面積の総計は

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n}\{\log_2(1+\frac{k+1}{n})-\log_2(1+\frac{k}{n})\}$$

$$=\frac{1}{2n}\{\{\log_2(1+\frac{1}{n})-\log_2 1\}+\{\log_2(1+\frac{2}{n})-\log_2(1+\frac{1}{n})\}+\cdots+\{\log_2 2-\log_2(1+\frac{n-1}{n})\}\}$$

$$=\frac{1}{2n}\{-\log_2 1+\log_2 2\}=\frac{1}{2n}$$

黄色+水色 < L だから $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n})+\frac{1}{2n}<L$, よって $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n})<L-\frac{1}{2n}$.

(*) より $\frac{P(n)}{n^2}<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\log_2(1+\frac{k}{n})<L-\frac{1}{2n}$ となり $\frac{1}{2n}<L-\frac{P(n)}{n^2}$ ■