

1 数列  $\{a_n\}$  は  $a_1$  が正の整数で、公比が 1 でない正の実数であるような等比数列とする。数列  $\{b_n\}$  は  $b_1$  が整数で、公差が整数であるような等差数列とする。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の各項は整数とする。数列  $\{b_n\}$  は  $b_1 = 8$  であり、公差は 10 とする。 $a_5 = b_5$  であるとき、数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。
- (2)  $a_1 = 27$  であり、数列  $\{a_n\}$  の公比は 1 より小さいとする。また、 $a_1 > b_1 > 0$  と  $a_3 = b_3$  を満たすとする。このとき、数列  $\{b_n\}$  の公差が最大となる場合の数列  $\{a_n\}$  と数列  $\{b_n\}$  の一般項の組をすべて求めよ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の公比は 1 より大きいとする。また、 $a_2 = b_2$  と  $a_4 = b_4$  を満たすとする。このとき、数列  $\{b_n\}$  の公差が最小となる場合の数列  $\{a_n\}$  と数列  $\{b_n\}$  それぞれの一般項を求めよ。

2  $\theta$  を  $0 \leq \theta \leq \pi$  を満たす実数とし、 $x$  の 2 次方程式

$$2x^2 - (4 \cos \theta)x + 3 \sin \theta = 0$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。

(100 点)

- (1) この 2 次方程式が虚数解を持つような  $\theta$  の値の範囲を求めよ。
- (2) この 2 次方程式が異なる 2 つの正の解を持つような  $\theta$  の値の範囲を求めよ。
- (3) この 2 次方程式の 1 つの解が虚数解で、その 3 乗が実数であるとする。このとき、 $\sin \theta$  の値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(100点)

- (1)  $p, q$  を整数とする。このとき、 $p - q$  が奇数であることと、 $p + q$  が奇数であることは同値であることを証明せよ。
- (2)  $p^2 - q^2 = 100$  を満たす整数の組  $(p, q)$  をすべて求めよ。
- (3)  $p^2 - q^2 = 250$  を満たす整数の組  $(p, q)$  の個数を求めよ。
- (4)  $p^2 - q^2 = 210000$  を満たす整数の組  $(p, q)$  の個数を求めよ。

4  $x$  の多項式

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$$

に対して、次の問いに答えよ。

(100点)

- (1) 極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)}$  と  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f(x)}$  を求めよ。
- (2) 次の等式が  $x$  についての恒等式となるような定数  $a, b, c, d$  の値を求めよ。

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

- (3)  $t \geq 3$  とする。定積分  $\int_3^t \frac{1}{f(x)} dx$  を求めよ。
- (4)  $t$  が  $3 \leq t \leq 5$  を満たす範囲で動くとき、 $F(t) = \int_3^t \frac{1}{f(x)} dx$  の最大値を求めよ。