【1】(1)　$a_n=a_1r^{n-1}, b_n=b_1+(n-1)d$　だが所与の条件より

$$a_5=a_1r^4=b_5=8+(5-1)\times 10\to a_1r^4=48$$

ところで数列 $\{a_n\}$ の各項が整数であるから公比 r は整数である。($r<1$ だとやがて $0<a_n<1$ となって整数でなくなるから、 $r>1$ で有理数でなければならず、しかも分母が 2 以上の既約分数であってはならない。結局 r は 2 以上の整数である。)

$a_1r^4=48=3\times 2^4\to a_1=3, r=2$　だから　$a_n=3\times 2^{n-1}$　(答)

(2)　$a_3=b_3\to 27r^2=b_1+2d$　であり、 $0<r<1, 27>b_1>0$　なる条件の下で最大の d を探す。

$b_1+2d\le 26\to d\le\dfrac{26-b_1}{2}\le 12.5$　より d=12 である。

$$b_1+24=27r^2<27\to b_1=1, 2$$

ア)　$b_1=1$　のとき　$b_n=1+12(n-1)=12n-11$　(答)

$$27r^2=25\to r=\frac{5}{3\sqrt{3}}\to a_n=27\cdot\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)^{n-1}\quad(答)$$

イ)　$b_1=2$　のとき　$b_n=2+12(n-1)=12n-10$　(答)

$$27r^2=26\to r=\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}\to a_n=27\cdot\left(\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}\right)^{n-1}\quad(答)$$

(3)　$a_2=b_2, a_4=b_4\to a_1r=b_1+d, a_1r^3=b_1+3d$　で辺々引いたり割ったりすれば

$$2d=a_1r(r^2-1)>0\quad ①$$

$$r^2=\frac{b_1+3d}{b_1+d}\quad ②$$

②を①に代入すると

$$2d=a_1\sqrt{\frac{b_1+3d}{b_1+d}}\times\frac{2}{b_1+d}=\frac{2a_1\sqrt{(b_1+d)(b_1+3d)}}{(b_1+d)^2}\quad , \quad d(b_1+d)^2=a_1\sqrt{(b_1+d)(b_1+3d)}$$

②より　b_1+d, b_1+3d　は同符号でともに 0 でないから、$\sqrt{\ }$ の中は正数でしかも平方数(=自然数の 2 乗)でなければ、右辺は無理数となり不合理。よって整数 k >0 を使って

$$(b_1+d)(b_1+3d)=k^2\to b_1^2+4db_1+(3d^2-k^2)=0\quad (*)$$

この　b_1　についての 2 次方程式が整数解を持つから、またしても$\sqrt{\ }$ の中(=判別式)が平方数だからそれを整数　$l\ge 0$　の 2 乗だとして

$$\frac{D}{4}=4d^2-(3d^2-k^2)=l^2\to d^2=(l+k)(l-k)$$

①より d > 0 だったから最小の d =1, 2, 3, … を順次探してみよう。

$l+k>0$　と　$l+k>l-k$　に注意して、

ア) d=1 のとき　$l+k=l-k=1$　しかないからダメ。

イ) d=2 のとき　$l+k=l-k=2$　しかないからダメ。

ウ) d=3 のとき　$(l+k, l-k)=(9,1)\to(l,k)=(5,4)$　の解のみ存在。これが最小の d であろう。

(*) より　$b_1^2+12b_1+11=0\to(b_1+1)(b_1+11)=0$

ア)　$b_1=-1$　のとき

$$r=\sqrt{\frac{b_1+3d}{b_1+d}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=2, a_1=\frac{2d}{r(r^2-1)}=1\quad で\quad a_n=2^{n-1}, b_n=-1+3(n-1)=3n-4\quad(答)$$

イ)　$b_1=-11$　のとき　$r=\sqrt{\dfrac{5}{2}}, a_1=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$　で　a_1　が整数にならず、ダメ。

【2】(1) 判別式が負、

$$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta=4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta<0 \quad ,$$

$$-2(2\sin^2\theta+3\sin\theta-2)<0 \quad ,$$

$$-2(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)<0$$

$\sin\theta+2>0$ に注意して $\sin\theta>\frac{1}{2}\to\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$ (答)

(2) 2 解を α,β とすれば D> 0 かつ $\alpha+\beta>0,\alpha\beta>0$. 解と係数の関係を使って

$$0\leq\theta<\frac{\pi}{6,}\frac{5}{6}\pi<\theta\leq2\pi \quad \text{かつ} \quad 2\cos\theta>0,\frac{3\sin\theta}{2}>0$$

よって $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ (答)

(3) 虚数解を $a+bi,b\neq0$ とすれば $(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2-b^2)bi$ が実数ということは

$$3a^2-b^2=0$$

と同値だ。所与の方程式の解は

$$x=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{2(2\sin^2\theta+3\sin\theta-2)}i}{2}$$

だから条件式は

$$3\cos^2\theta-\frac{(2\sin^2\theta+3\sin\theta-2)}{2}=0 \quad ,$$

$$6(1-\sin^2\theta)-(2\sin^2\theta+3\sin\theta-2)=-8\sin^2\theta-3\sin\theta+8=0$$

となる。解の公式により

$$\sin\theta=\frac{-3\pm\sqrt{265}}{16}$$

だが、 $16=\sqrt{256}<\sqrt{265}<\sqrt{289}=17$ より $\sin\theta=\frac{-3+\sqrt{265}}{16}$ (答)

【3】(1)　$p-q=2n+1$　ならば　$p+q=(p-q)+2q=2(n+q)+1$　で奇数になる。逆に
$p+q=2m+1$　ならば　$p-q=(p+q)-2q=2(m-q)+1$　でやはり奇数になる。■

(2) 対偶を考えて　$p-q$　が偶数(奇数)であることと　$p+q$　が偶数(奇数)であることは同値。

$$(p-q)(p+q)=100$$

のように積が偶数なら両者はともに偶数。(この場合、偶と奇の組合せはない。) よって

$$\frac{p-q}{2}\cdot\frac{p+q}{2}=25$$

今度は積が奇数で、2 つの分数はともに奇数。したがって

$$\left(\frac{p-q}{2},\frac{p+q}{2}\right)=(\pm25,\pm1),(\pm5,\pm5),(\pm1,\pm25)\quad ,$$

$$(p,q)=(\pm26,\mp24),(\pm10,0),(\pm26,\pm24)\quad \text{(複号同順)(答)}$$

(3)　$(p-q)(p+q)=250$　で積が偶数なら両者はともに偶数で、両辺は 4 で割り切れるはずだが 250 は割れない。よってこのような整数の組合せはない。個数は 0 組。(答)

(4) 素因数分解して　$210000=2^4\times3\times7\times5^4$　に注意する。例によって

$$(p-q)(p+q)=210000$$

の 2 数はともに偶数だから 2(または 2 のベキ) で割れるのだが割り方が 3 通りある。すなわち

$$\frac{p-q}{8}\cdot\frac{p+q}{2}=3\times7\times5^4\quad ,\quad \frac{p-q}{4}\cdot\frac{p+q}{4}=3\times7\times5^4\quad ,\quad \frac{p-q}{2}\cdot\frac{p+q}{8}=3\times7\times5^4$$

このあと奇数の因子を　$\frac{p-q}{m}$　と　$\frac{p+q}{n}$　(mn=16) の 2 数に割り振る。一般に　$a^p\times b^q\times c^r$　の正の約数は　$(p+1)(q+1)(r+1)$　個、負の約数も入れるとその 2 倍になる。

$$\frac{p-q}{m}=3^{p'}\times7^{q'}\times5^{r'}$$

とおく方法が負の場合も込めて　$2\times(1+1)(1+1)(4+1)=40$　通りある。($\frac{p+q}{n}$　は自動的に決まるので考えなくて良い。) そして m は　$m=8,4,2$　と 3 通りあるので、その 3 倍になる。すなわち

$$40\times3=120\quad \text{個(解)}$$

の連立方程式とその解ができる。

【4】(1)　$f(x)=x(x-2)(x-1)^2$　に注意。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}\quad(答)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{2}\quad(答)$$

(2)　$\dfrac{1}{x(x-2)(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{(x-1)^2}$　の分母を払って

$$a(x-2)(x-1)^2+bx(x-1)^2+cx(x-2)(x-1)+dx(x-2)=1\quad(*)$$

この式に　$x=0,2,1$　を代入すると

$-2a=1$　,

$2b=1$　,

$-d=1$

(*) を微分して

$$a\{(x-1)^2+2(x-2)(x-1)\}+b\{(x-1)^2+2x(x-1)\}$$
$$+c\{(x-2)(x-1)+x(x-1)+x(x-2)\}+d\{(x-2)+x\}=0$$

に　$x=1$　を代入して

$-c=0$

よって　$a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2},c=0,d=-1$

(3)　$\dfrac{1}{x(x-2)(x-1)^2}=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$　だから

$$\int_3^t\frac{1}{f(x)}dx=\left[-\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\log(x-2)+\frac{1}{x-1}\right]_3^t=-\frac{1}{2}\log\frac{t}{3}+\frac{1}{2}\log(t-2)+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\quad(答)$$

(4)　$F'(t)=\dfrac{1}{f(t)}=\dfrac{1}{t(t-2)(t-1)^2}>0,3\leq t\leq 5$　でFは単調増加だから最大値は

$$F(5)=\int_3^5\frac{1}{f(x)}dx=-\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log\frac{9}{5}-\frac{1}{4}\quad(答)$$