【第 1 問】(1) 3 次式を $(x-\alpha)^2$ で割れば商は 1 次式で余りも 1 次式だから

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)+ax+b$$

と書ける。よって

$$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2+a \to a=b=0$$

条件 (ii) により

$$f(\alpha)=a\alpha+b=0, f'(\alpha)=a=0$$

したがって $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ ■

(2) $f(\alpha+2)=4(\alpha+2-\beta)=0 \to \beta=\alpha+2 \to f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-2)$ となる。

$$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\alpha-2)+(x-\alpha)^2=(x-\alpha)(3x-3\alpha-4)=0$$

だから求めるべき x は $x=\dfrac{3\alpha+4}{3}$ (答)

(3) $f(x)=x^2(x-2), f'(x)=x(3x-4)$ であり、この 2 曲線の交点の x 座標が

$$x^2(x-2)=x(3x-4) \to x(x^2-5x+4)=0 \to x(x-1)(x-5)=0 \to x=0,1,5$$

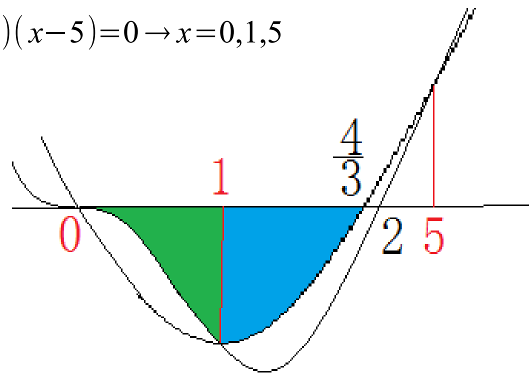
であることに注意してグラフを描く。

$$S=-\int_0^1(x^3-2x^2)\,dx-\int_1^{4/3}(3x^2-4x)\,dx$$

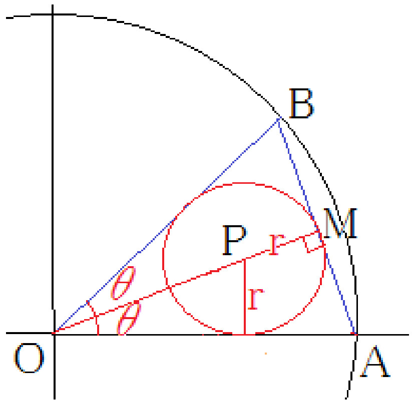
$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1-\left[x^3-2x^2\right]_1^{4/3}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\left(\frac{64}{27}-1\right)+2\left(\frac{16}{9}-1\right)$$

$$=\frac{-27+36\times2-4\times37+12\times2\times7}{108}=\frac{65}{108}$$ (答)



【第２問】(1) 右図のように AB の中点を M とする。線分 OM は頂角(大きさ　2θ　) の二等分線で、内心はこの直線上にある。内接円の半径を r とすれば、



$$OP = OM - r = \cos\theta - r$$

また

$$\frac{r}{OP} = \sin\theta$$

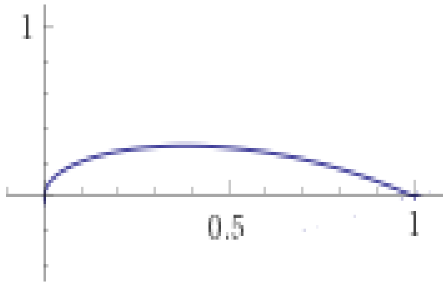
だから、　$\dfrac{r}{\sin\theta} = \cos\theta - r \to \left(\dfrac{1}{\sin\theta} + 1\right) r = \cos\theta$　,

$$r = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

これが点 P の y 座標になる。x 座標の方は

$$OP\cos\theta = (\cos\theta - r)\cos\theta = \frac{(1+\sin\theta)\cos\theta - \sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta} \times \cos\theta = \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = 1-\sin\theta$$

したがって　$P = \left(1-\sin\theta, \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$　■



(2)　$V = \pi\int_0^1 y^2\,dx = \pi\int_{\pi/2}^0 \left(\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 (-\cos\theta)\,d\theta$

$$= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\,(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\,(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}\cos\theta\,d\theta$$

ここで　$t = \sin\theta,\ dt = \cos\theta\,d\theta$　と置換すれば

$$V = \pi\int_0^1 \frac{t^2-t^3}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(-t^2+2t-2+\frac{2}{t+1}\right)dt = \pi\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2-2t+2\log(t+1)\right]_0^1$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{3}+1-2+2\log 2\right) = \pi\left(-\frac{4}{3}+2\log 2\right)$$　(答)

【第 3 問】(1) 1+29, 2+28, 3+27, …, 29+1 の 29 個(答)

(2) 例えば 5+10+15=30 だが、第 1 項から累計を求めると (5, 15, 30) だ。
10+10+10=30 だったら、累計は (10, 20, 30) だ。ここで累計とは $a_1+a_2+a_3=30$ に対して

$$(a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3)$$

のことである。 $0<a_1<a_1+a_2<a_1+a_2+a_3=30$ だから 1～29 の自然数から 2 個選ぶ組合せになる。したがってその総数は

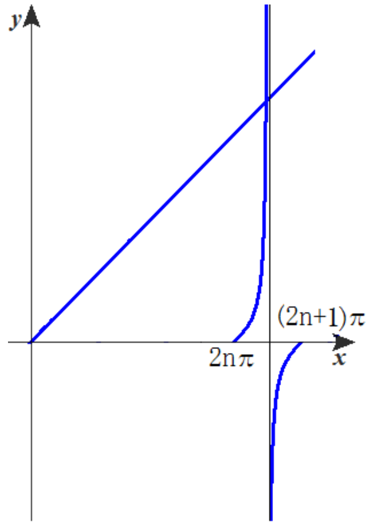
$${}_{29}C_2=\frac{29!}{2!27!}=406 \quad \text{個(答)}$$

(3) 前問の答において順序を無視したものが答だ。
ア) 例えば 3+5+12=5+12+3= …… のように 3 数とも異なる場合は $3!=6$ 通りずつが同じものとされるので 6 で割らないといけない。
イ) 10+10+10 のように 3 数とも等しい場合は、割る必要はない（しいて言えば 1 で割る）。このような「スリーカード」は例に挙げた 1 種類しかない。
ウ) 例えば 3+3+24=3+24+3= 24+3+3 のように 2 数だけ同じ場合は 3 通りずつが同じものとされるので 3 で割らないといけない。このような「ワン・ペア」は 1+1+28, 2+2+26, ……, 14+14+2 の 14 種類から「スリーカード」の 1 種類を引いた 13 種類の 3 倍＝39 通りできる。
結局、組合せの数は

$$\frac{406-1-39}{6}+\frac{39}{3}+\frac{1}{1}=61+13+1=75 \quad \text{個(答)}$$

【第４問】(1)　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, 2n\pi \le x \le (2n+1)\pi$　は　$f(2n\pi)=f((2n+1)\pi)=0$　だからこの２点以外で最大になるとしたら、その点で臨界、すなわち　$f'(x)=0$　でなければならない。

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0 \rightarrow x\cos x=\sin x$$



sin x は端点以外で正だから、この等式が成り立つ場所は

$2n\pi < x < (2n+\frac{1}{2})\pi$　の範囲まで絞り込める。この範囲で

$\tan x = x$　となる点は１個あり、１個に限ることは右のグラフから明らかであるが、念のために確かめると

$$g(x)=\tan x - x, g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}>0$$

で g(x) は単調増加で

$$g(2n\pi)=-2n\pi<0, \lim_{x\rightarrow(2n+1/2)\pi} g(x)=+\infty$$

だからである。■

(2) 上記臨界点　$x=x_n$　では、　$\tan x_n = x_n, 2n\pi < x_n < (2n+\frac{1}{2})\pi$　が成り立つ。よって

$$\frac{n}{(2n+\frac{1}{2})\pi}<\frac{n}{\tan x_n}<\frac{n}{2n\pi}$$

挟み撃ちにより

$$\lim \frac{n}{(2n+\frac{1}{2})\pi} \le \lim \frac{n}{\tan x_n} \le \lim \frac{n}{2n\pi} \quad ,$$

$$\lim \frac{n}{\tan x_n}=\frac{1}{2\pi} \quad (答)$$

【第5問】(1)　$x_1=\dfrac{1}{9}$　であり、漸化式によりいくつか計算してみると

$$x_1=\frac{1}{9},\, x_2=\frac{7}{9},\, x_3=\frac{5}{9},\, x_4=\frac{1}{9},\cdots$$

となり、ループになることが分かる。したがって

$n\equiv 1\,(mod.3)$　のとき　$x_n=\dfrac{1}{9}$　;

$n\equiv 2\,(mod.3)$　のとき　$x_n=\dfrac{7}{9}$　;

$n\equiv 0\,(mod.3)$　のとき　$x_n=\dfrac{5}{9}$　(答)

(2)　$\dfrac{2}{2^p+1}-1=\dfrac{1-2^p}{2^p+1}<0$　だから符号を反転させて、　$x_2=\dfrac{2^p-1}{2^p+1}$　は確実だ。

この後は絶対値記号を無視すれば

$$x_3=\frac{2^{p+1}-2-(2^p+1)}{2^p+1}=\frac{2^{p+1}-2^p-3}{2^p+1}\quad ,$$

$$x_4=\frac{2^{p+2}-2^{p+1}-2^p-7}{2^p+1}\quad ,$$

$$x_5=\frac{2^{p+3}-2^{p+2}-2^{p+1}-2^p-15}{2^p+1}\quad ,\ldots\ldots$$

のように変化していく。だから

$$x_{2+k}=\frac{2^{p+k}-2^{p+k-1}-\cdots-2^p-(2^{k+1}-1)}{2^p+1}$$

すなわち

$$x_{2+k}=\frac{2^{p+k}-2^p(2^k-1)-(2^{k+1}-1)}{2^p+1}\quad (*)$$

が成り立つであろう。ただし、分子が負になるとマズいので、精密に言うと 0< k <p の範囲で(*) が成り立つであろう。それを数学的帰納法で確かめる。

k=1 のとき、分子は　$2^{p+1}-2^p-3=2^p-3\geq 2^2-1>0$　だから OK.

k (≦p-2) のとき (*) が成り立つなら

$$x_{3+k}=\left|2\times\frac{2^{p+k}-2^p(2^k-1)-(2^{k+1}-1)}{2^p+1}-1\right|=\left|\frac{2^{p+k+1}-2^p(2^{k+1}-2)-(2^{k+2}-2)-(2^p+1)}{2^p+1}\right|$$

$$=\left|\frac{2^{p+k+1}-2^p(2^{k+1}-1)+2^p-(2^{k+2}-1)+1-(2^p+1)}{2^p+1}\right|=\left|\frac{2^{p+k+1}-2^p(2^{k+1}-1)-(2^{k+2}-1)}{2^p+1}\right|$$

ここで分子は　$2^{p+k+1}-2^p(2^{k+1}-1)-(2^{k+2}-1)=2^p-2^{k+2}+1\geq 2^p-2^p+1>0$　だから絶対値記号は外れる。すなわち(*) は k+1 (≦p-1) のときにも成り立つ。

(*) に k=p-1 を代入して

$$x_{2+p-1}=\frac{2^{2p-1}-2^p(2^{p-1}-1)-(2^p-1)}{2^p+1}=\frac{2^{2p-1}-2^{2p-1}+2^p-2^p+1}{2^p+1}=\frac{1}{2^p+1}\quad ■$$