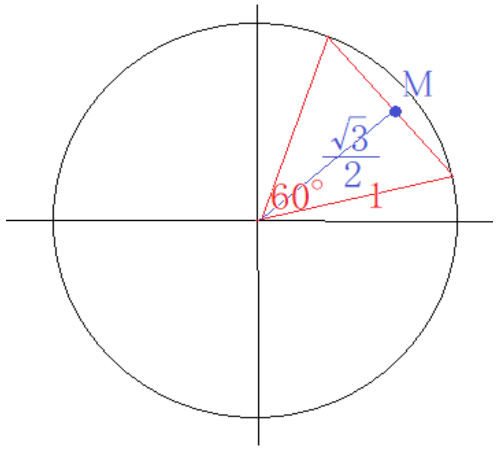
【1】(1) (i)　$z_2=x+yi, x^2+y^2=1, y\geqq 0$　とおけば　$M(X+Yi)$　の軌跡は　$X=\frac{x+1}{2}, Y=\frac{y}{2}$　より

$$(2X-1)^2+(2Y)^2=1, Y\geq 0 \to \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\frac{1}{4}, Y\geq 0$$

中心　$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$　,半径　$\frac{1}{2}$　の半円だから、その面積は　$\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}$　(ア)

(ii)　$z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$　とおけば　$z_1\bar{z}_2=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2))$　だから

$$\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\to\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{3}$$



右図のように1辺の長さが1の正三角形が1つの頂点を中心として回転する。ところが　$0\leq\theta_2<\theta_1\leq\pi$　だから

点Mの偏角は　$\frac{\pi}{6}\leq\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\leq\frac{5}{6}\pi$　の範囲を動く。

よって軌跡は半径　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　,中心角　$\frac{2}{3}\pi$　の円弧で、

その弧長は　$r\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$　(イ)

(2)　C_1　の接線の方程式は

$$Y-x^2=2x(X-x)$$

これが点　(t, t^2-4)　を通るから

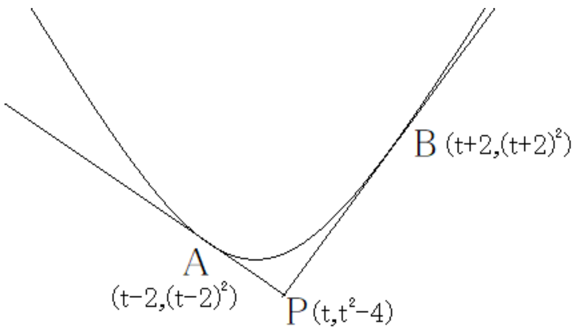
$$t^2-4-x^2=2x(t-x)$$

よって

$$x^2-2tx+t^2-4=0$$

$$(x-t+2)(x-t-2)=0$$

$$x=t-2, t+2$$



小さい方をとってAの　x　座標は　$t-2$　(ウ)

$$\vec{PR}=\frac{1}{5}(3\vec{PQ}+2\vec{PB})=\frac{1}{5}\left(3\cdot\frac{1}{3}\vec{PA}+2\vec{PB}\right)=\frac{1}{5}\vec{PA}+\frac{2}{5}\vec{PB}\quad(\text{エ・オ})$$

$P(t, t^2-4), A(t-2, (t-2)^2), B(t+2, (t+2)^2), R(x, y)$　に注意すれば(上図参照)

$$(x-t, y-(t^2-4))=\frac{1}{5}(-2, (t-2)^2-(t^2-4))+\frac{2}{5}(2, (t+2)^2-(t^2-4))$$

$$(x-t, y-(t^2-4))=\frac{1}{5}(2, 4t+24)$$

$$x=t+\frac{2}{5}, y=(t^2-4)+\frac{1}{5}(4t+24)=t^2+\frac{4}{5}t+\frac{4}{5}$$

2式から　t　を消去して

$$y=\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\left(x-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}=x^2+\frac{16}{25}\quad(\text{カ})$$

【2】(1) 2 重解なら $P(x)=(x-\alpha)^2 Q(x)$ とおける。これを微分すれば

$$P'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2 Q'(x) \to P'(\alpha)=0$$

(2) 2 式から y を消去すれば 4 次方程式 $f(x)=k^2x^4+(x-5)^2-7=0$ この方程式が n 個の実数解を持てばそれに対し 1 つずつ y が対応するから、交点は n 個となる。 n の最大値を求めよう。4 次方程式だから $n=4$ となるかというと、そうはいかない。極値(臨界値)が何個あるかを調べればよい。

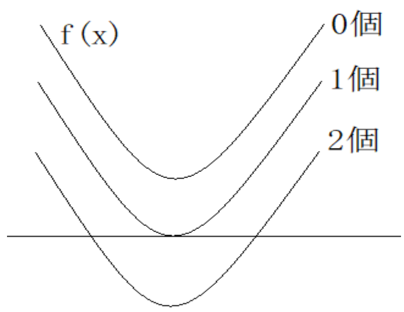
$$f'(x)=4k^2x^3+2(x-5)$$

これをさらに微分して

$$f''(x)=12k^2x^2+2>0$$

$f'(x)$ は単調増加で、 $x\to-\infty$ **のとき** $f'(x)\to-\infty$ ， $x\to\infty$ **のとき** $f'(x)\to\infty$ だから $f'(x)=0$ なる点は 1 個のみで、この点の左右で符号は負から正に変わるから、 $f(x)$ はこの点で極小になり、これ以外に極値は持たない。この極小値がもし負であれば $f(x)=0$ なる x は 2 個あることになる。負にならなければ 2 個未満になってしまうが、 k の値を 0 に近い値にとればグラフの交点が 2 個になることは明らかである。(キ)＝2 個

(3) 所与の条件を満たすには $f(x)$ の極小値が 0 になればよい。極小点を x とすれば連立方程式



$$f(x)=k^2x^4+(x-5)^2-7=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$f'(x)=4k^2x^3+2(x-5)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

がなりたつ。①× 4 －②× x で k を消去すると

$$4(x-5)^2-28-2x(x-5)=0$$

となって

$$2x^2-30x+72=0 \to (x-3)(x-12)=0$$

交点は円周上にあるはずだから $5-\sqrt{7}\le x\le 5+\sqrt{7}$ より $x=3$ (ク)

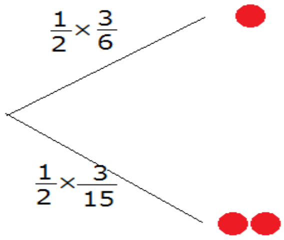
$x=3$ を①に代入して $81k^2-3=0 \to k=\pm\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ (ケ)

【3】(1) 1 回の操作で全部赤になるのは、右図のように

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}=\frac{7}{20}$$

である。これが 2 回連続するのだから求めるべき確率は

$$\frac{7}{20}\times\frac{7}{20}=\frac{49}{400}\quad(コ)$$



3 回で 5 個取り出すということは、コインの出方は(HTT), (THT), (TTH) の 3 通り(H:表, T:ウラ)でいずれもその確率は等しく合計すれば(反復試行の確率)

$${}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

この条件の下で(範囲内で)すべて赤玉の確率を求めよう。

(HTT)ですべて赤は $\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{400}$

(THT), (TTH) でも掛ける順序が変わるだけだから同じで、3 つの合計は $3\times\frac{1}{400}=\frac{3}{400}$

したがって求めるべき条件付き確率は $\frac{3}{400}\div\frac{3}{8}=\frac{8}{400}=\frac{1}{50}$ (サ)

(2) 元に戻さないことに注意して、樹形図を書く。

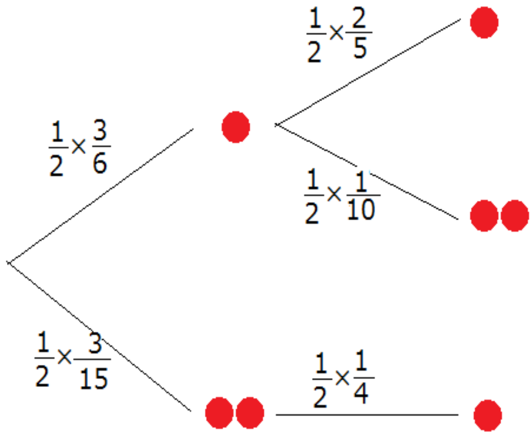
樹形図の上から

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}\ ,$$

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{80}\ ,$$

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{80}$$

これらを合計して $\frac{1}{20}+\frac{1}{80}+\frac{1}{80}=\frac{3}{40}$ (シ)



(3) 3 回で 4 個取り出すということは、コインの出方は(HHT), (HTH), (THH) の 3 通りでいずれもその確率は等しく合計すれば

$${}_3C_2\times p^2(1-p)=3p^2(1-p)$$

玉は戻さないのだから取り出す順序は関係ない。試行が終わった後、手元に赤 2 個、白 2 個あればよいのだ。6 個から 4 個取り出した結果が (赤 2, 白 2) になる確率は

$$\frac{{}_3C_2\times{}_3C_2}{{}_6C_4}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

この 2 つを掛けて求めるべき確率は $3p^2(1-p)\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}p^2(1-p)$ **(ス)**

3 回で同数なら(赤 2 個, 白 2 個) か (赤 3 個, 白 3 個) だ。前者は今求めた。後者ではコインの出方は(TTT) しかない。よって、 $(1-p)^3$ と、6 個から 6 個取り出した結果が (赤 3, 白 3) になる確率 1 を掛けた $(1-p)^3$ と足し合わせて、

$$\frac{9}{5}p^2(1-p)+(1-p)^3=1-p\rightarrow 9p^2+5(1-p)^2=5\rightarrow 14p^2-10p=0\rightarrow p=\frac{5}{7}\quad(セ)$$

【４】(1)　$g(x)=\int_0^{2x} e^{-(t-x)}dt=e^x\int_0^{2x} e^{-t}dt=e^x[-e^t]_0^{2x}=e^x(1-e^{-2x})=e^x-e^{-x}$　（ソ）

(2)　$g(x)+g(-x)=0$　を示せばよい。
左辺＝　$\int_0^{2x} e^{-f(t-x)}dt+\int_0^{-2x} e^{-f(t+x)}dt$
第１項で　$t-x=s$　と置換すると　$dt=ds, s=-x\to x$　だから、第１項＝　$\int_{-x}^{x} e^{-f(s)}ds$
第２項で　$t+x=s$　と置換すると　$dt=ds, s=x\to -x$　だから、第２項＝　$\int_{x}^{-x} e^{-f(s)}ds$
よって第１項＋第２項＝0

(3)　$g(x)=\int_0^{2x} e^{-\sin(t-x)}dt$　において　$t-x=s$　と置換すると　$dt=ds, s=-x\to x$　だから、
$g(x)=\int_{-x}^{x} e^{-\sin s}ds=\int_0^{x} e^{-\sin s}ds-\int_0^{-x} e^{-\sin s}ds$　を微分すればよい。
ところで　$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$　であり、　$\frac{d}{dx}\int_0^y f(t)dt=\frac{d}{dy}\int_0^y f(t)dt\times\frac{dy}{dx}=f(y)y'$　に注意して
$g'(x)=e^{-\sin x}-e^{-\sin(-x)}\times(-1)=e^{-\sin x}+e^{\sin x}$　(タ)

(4) (3)の冒頭のようにすれば

$$g(x)=\int_0^{2x} e^{-f(t-x)}dt=\int_{-x}^{x} e^{-f(s)}ds=\int_0^{x} e^{-f(s)}ds-\int_0^{-x} e^{-f(s)}ds$$

で、これを微分すれば

$$g'(x)=e^{-f(x)}-e^{-f(-x)}\times(-1)=e^{-f(x)}+e^{-f(-x)}$$

ところが偶関数であることから　$f(x)=f(-x)$　だから　$g'(x)=2e^{-f(x)}$
よって　$3x^2+3=2e^{-f(x)}\to -f(x)=\log\frac{3(x^2+1)}{2}\to f(x)=\log 2-\log 3-\log(x^2+1)$　(チ)
これを積分するのだが、難しいところを先にやっておこう。

$$\int_0^1 \log(x^2+1)dx=[x\log(x^2+1)]_0^1-\int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

$$=\log 2-\int_0^1(2-\frac{2}{x^2+1})dx=\log 2-2+2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$

ここで最終項は　$x=\tan\theta$　の置換積分で、　$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=(1+\tan^2\theta)d\theta=(x^2+1)d\theta, \theta=0\to\frac{\pi}{4}$
だから

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\pi/4}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

したがって

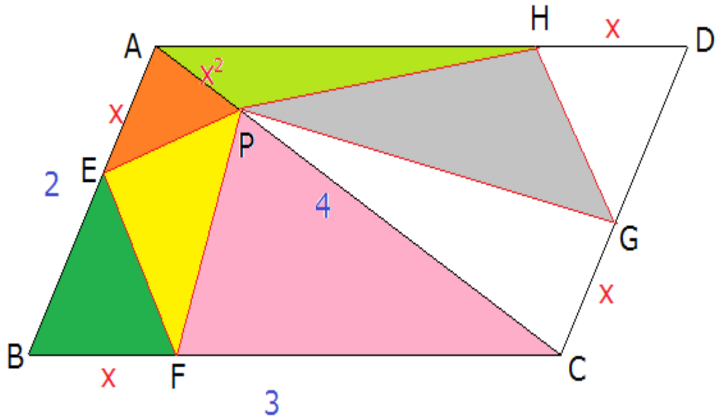
$$\int_0^1 f(x)dx=(\log 2-\log 3)-\int_0^1\log(x^2+1)dx=(\log 2-\log 3)-(\log 2-2+2\times\frac{\pi}{4})$$

$$=2-\log 3-\frac{\pi}{2}$$　(ツ)

【5】(1) △ABC=S/2 を基準にして考える。
△AEP は△ABC と比べると、
底辺が $\frac{x^2}{4}$ 倍、高さが $\frac{x}{2}$ 倍だから

$$T_1=\frac{S}{2}\times\frac{x^2}{4}\times\frac{x}{2}=S\times\frac{x^3}{16}$$

よって $\frac{T_1}{S}=\frac{x^3}{16}$ (テ)



(2) △ABC から、今の△AEP と△BEF と△CFP を引けばよい。

$$T_2=\frac{S}{2}-S\times\frac{x^3}{16}-\frac{S}{2}\times\frac{x}{3}\times\frac{2-x}{2}-\frac{S}{2}\times\frac{3-x}{3}\times\frac{4-x^2}{4}=S\left\{\frac{1}{2}-\frac{x^3}{16}+\frac{x(x-2)}{12}-\frac{(x-3)(x^2-4)}{24}\right\}$$

$$=\frac{S}{48}(-5x^3+10x^2)\to\frac{T_2}{S}=\frac{1}{48}(-5x^3+10x^2)$$

微分すれば $\left(\frac{T_2}{S}\right)'=\frac{1}{48}(-15x^2+20x)=-\frac{5}{48}x(3x-4)$ だから

$x=0$ で極小、 $x=\frac{4}{3}$ で極大。 $0<x<2$ の範囲内での最大値は $x=\frac{4}{3}$ (ト) のときで

$$\frac{T_2}{S}=\frac{1}{48}\left\{-5\left(\frac{4}{3}\right)^3+10\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}=\frac{10}{81}\quad(ナ)$$

(3) 前問のように、△ACD から、△APH と△DGH と△CGP を引けばよい。

$$T_3=\frac{S}{2}-\frac{S}{2}\times\frac{3-x}{3}\times\frac{x^2}{4}-\frac{S}{2}\times\frac{x}{3}\times\frac{2-x}{2}-\frac{S}{2}\times\frac{x}{2}\times\frac{4-x^2}{4}=S\left\{\frac{1}{2}+\frac{x^2(x-3)}{24}+\frac{x(x-2)}{12}+\frac{x(x^2-4)}{16}\right\}$$

$$=\frac{S}{48}(5x^3-2x^2-20x+24)\to\frac{T_2}{S}=\frac{1}{48}(5x^3-2x^2-20x+24)=\frac{1}{3}$$

これより

$$5x^3-2x^2-20x+8=0\to(x-2)(x+2)(5x-2)=0$$

だから $x=\frac{2}{5}$ (ニ)

(4) 折れ線 EPH は $x=0$ から出発した直後には「く」の字だが、 $x=2$ に近づくと「く」の字の裏返しになるから、EPH が一直線になることが $0<x<2$ のどこかで起きる(1 回以上)。もし一直線になれば△AEP と△APH の面積の和が△AEH の面積に等しくならねばならない。よって

$$S\times\frac{x^3}{16}+\frac{S}{2}\times\frac{3-x}{3}\times\frac{x^2}{4}=\frac{S}{2}\times\frac{x}{2}\times\frac{3-x}{3}$$

両辺を 48 倍して S で割って

$$3x^3-2x^2(x-3)=-4x(x-3)\to x^3+10x^2-12x=0\to x(x^2+10x-12)=0$$

$0<x<2$ に適合するのは $x=-5+\sqrt{37}$ (ヌ) だけである。(一直線になるのは 1 回こっきり)