〔Ⅰ〕 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，O，A，B，C を頂点とし，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1, \qquad \angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COA} = \theta \text{ ラジアン}$$

となる四面体 OABC を考える。$0 < s < 1$ を満たす s に対して，辺 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を P とおく。また，$0 < t < 1$ を満たす t に対して，辺 OB を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1) CP の長さを s，θ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を s，t，θ を用いて表せ。

(3) $s + t = 2\cos\theta$ のとき，$\mathrm{CP} = \mathrm{CQ}$ となることを示せ。

(4) (3) の仮定のもとで，PQ が最小となるときの s を θ を用いて表せ。

〔Ⅱ〕 2つの関数を

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

とする。次の $\boxed{}$ をうめよ。

実数 a に対して，方程式 $f(x) = a$ は，$|a| >$ $\boxed{①}$ のとき2個の実数解，$|a| =$ $\boxed{①}$ のとき1個の実数解をもち，$|a| <$ $\boxed{①}$ のとき実数解をもたない。

関数 $g(x)$ は $f(x)$ を用いて

$$g(x) = \boxed{②}$$

と表される。したがって，実数 b に対して，x が方程式 $g(x) = b$ の実数解であることと，x が方程式 $f(x) = 1 + \sqrt{\boxed{③}}$ または $f(x) = 1 - \sqrt{\boxed{③}}$ の実数解であることは同値である。よって，$b <$ $\boxed{④}$ のとき $g(x) = b$ は実数解をもたない。また，$g(x) = b$ は $b =$ $\boxed{④}$ のとき実数解を1個，$\boxed{④} < b < \boxed{⑤}$ のとき実数解を2個，$b =$ $\boxed{⑤}$ のとき実数解を $\boxed{⑥}$ 個，$b >$ $\boxed{⑤}$ のとき実数解を $\boxed{⑦}$ 個もつ。

〔Ⅲ〕 関数 $f(x)=\dfrac{\sin(\log x)}{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $\sin(\log x)$ の導関数を求めよ。

(2) $f(x)$ の導関数を

$$f'(x)=\frac{\alpha\cos(g(x))}{x^2}$$

の形で表す。ただし，α は正の定数で，$g(x)$ は $0<g(1)<2\pi$ を満たすものとする。α と $g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ が極大となる x で $\log x>0$ を満たすものを小さい方から順に a_1，a_2，a_3，……，a_n，……とおく。a_n を求めよ。

(4) 1 以上の整数 n に対して

$$S_n=\int_1^{a_n}|f(x)|dx$$

とおく。S_n および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) n を2以上の整数とし，$2n$ 本の当たりくじを含む n^2 本のくじがある。A，Bの2人がこの順にくじを1本ずつ引く。ただし，Aが引いたくじはもとに戻さないものとする。2人とも当たる確率が2人ともはずれる確率より小さくなるような n の値のうち，最も小さいものは $\boxed{①}$ である。

(2) a，b を正の定数とする。x，y を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を満たす実数とするとき

$$z=\left(\frac{x}{a}\right)^4+\left(\frac{y}{b}\right)^4$$

のとりうる値の範囲は $\boxed{②} \leqq z \leqq \boxed{③}$ である。

(3) 方程式

$$\log\left((e^{2x}-1)(e^x+1)\right)+\frac{(\log(e^x+1))^2}{\log(e^x-1)}=0$$

を解くと，$x=\boxed{④}$ である。

(4) 虚数単位 i を用いて

$$a_n=\frac{i}{4}\{(1-2i)^n-(1+2i)^n\} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とおく。このとき，等式

$$a_{n+2}-\boxed{⑤}\,a_{n+1}+\boxed{⑥}\,a_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ。ただし，$\boxed{⑤}$ と $\boxed{⑥}$ は実数である。

(5) n を2以上の整数とする。整数 $(n-1)^3$ を整数 n^2-2n+2 で割ったときの商と余りは，それぞれ $\boxed{⑦}$，$\boxed{⑧}$ である。

(以上)