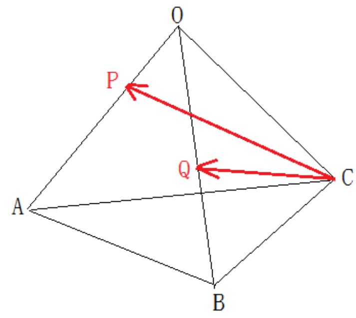
【I】(1)　$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$　だから

$$|\overrightarrow{CP}|^2=(s\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(s\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=s^2|\overrightarrow{OA}|^2-2s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=s^2-2s\cos\theta+1$$

よって　$CP=\sqrt{s^2-2s\cos\theta+1}$　(答)



(2)　$\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$　だから

$$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=(s\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$$
$$=st\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-s\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-t\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2$$
$$=st\cos\theta-s\cos\theta-t\cos\theta+1=(st-s-t)\cos\theta+1$$ (答)

(3)　$|\overrightarrow{CP}|^2-|\overrightarrow{CQ}|^2=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ})\cdot(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CQ})$

だから最右辺が 0 であることを言えば CP=CQ になる。

最右辺=　$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})\cdot(s\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OB})=s^2|\overrightarrow{OA}|^2-t^2|\overrightarrow{OB}|^2-2s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$$=s^2-t^2-2s\cos\theta+2t\cos\theta=(s-t)(s+t-2\cos\theta)$$

$s+t=2\cos\theta$　ならば　$|\overrightarrow{CP}|^2=|\overrightarrow{CQ}|^2$　となり、CP=CQ　■

(4)　$|\overrightarrow{QP}|^2=(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CQ})\cdot(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CQ})=(s\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OB})\cdot(s\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OB})$

$$=s^2|\overrightarrow{OA}|^2-2st\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t^2|\overrightarrow{OB}|^2=s^2-2st\cos\theta+t^2$$

ここから t を消去すると

$$=s^2-2s(2\cos\theta-s)\cos\theta+(2\cos\theta-s)^2=(2\cos\theta+2)s^2-4(\cos^2\theta+\cos\theta)s+4\cos^2\theta$$
$$=(2\cos\theta+2)\left(s-\frac{2(\cos^2\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta+2}\right)^2+\cdots$$
$$=(2\cos\theta+2)(s-\cos\theta)^2+\cdots$$

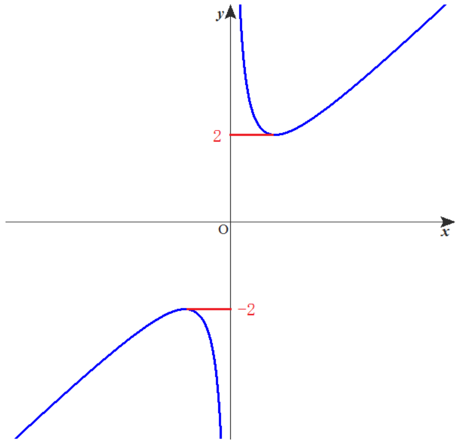
したがって PQ が最小になるときは　$s=\cos\theta$　(答)

【II】(1) x>0 なら相加平均≧相乗平均より

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

で等号成立は x=1 のとき。x<0 のときは奇関数であることから
グラフが点対称で

$$x+\frac{1}{x}\leq -2$$



したがって　$f(x)=a$　が 2 個の実数解を持つのは

$|a|>2$　①の答

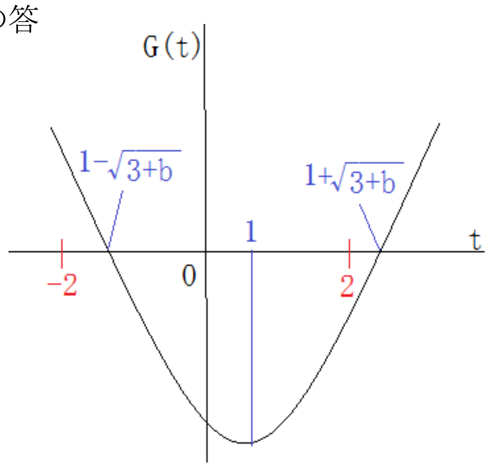
1 個は　$|a|=2$　, 0 個は　$|a|<2$　である。

次に

$$g(x)=(x+\frac{1}{x})^2-2(x+\frac{1}{x})-2=f(x)^2-2f(x)-2$$　②の答

$g(x)-b=f(x)^2-2f(x)-2-b=0$　の解は

$$f(x)=1\pm\sqrt{1+(2+b)}=1\pm\sqrt{3+b}$$　③の答



ここで g(x) – b を　$t=x+\frac{1}{x}$　の関数と見て

$$G(t)=t^2-2t-2-b$$

とおこう。グラフは右図だ。

g(x) – b = 0 が実数解を持たないのは

ア) ルートの中が負、すなわち　$b<-3$　のときと、

イ)　$|f(x)|<2$　のとき、精密に言うと 2 値関数 f(x) の実数値が 2 つとも絶対値 2 未満のとき

$(b\geq -3)\wedge(-2<1-\sqrt{3+b})\wedge(1+\sqrt{3+b}<2)$　,

$(b\geq -3)\wedge(b<6)\wedge(b<-2)$　,

$-3\leq b<-2$

ア- イの合併集合をとって、　$b<-2$　④の答

実数解 1 個になるのは　$1+\sqrt{3+b}, 1-\sqrt{3+b}$　のうち 0 から遠い方の　$1+\sqrt{3+b}$　が 2 に等しいとき、すなわち　$b=-2$

b がこれより大きくなって、0 から近い方の　$1-\sqrt{3+b}$　がー2 に等しくなるまで、すなわち b＝6 までの間は解は 2 個だ。だから解 2 個は　$-2<b<6$　⑤の答

b=6 で解は1個＋2個で、3個。⑥の答

b がこれより大きくなると、　$2<1+\sqrt{3+b}$　の2個と　$1-\sqrt{3+b}<-2$　の2個のあわせて4個。⑦の答

【III】(1)　$y'=\cos(\log x)\times\frac{1}{x}=\frac{\cos(\log x)}{x}$　(答)

(2)　$f'(x)=\frac{\cos(\log x)/x\times x-\sin(\log x)\times 1}{x^2}=\frac{\cos(\log x)-\sin(\log x)}{x^2}$

これが　$\frac{\alpha\cos(g(x))}{x^2}$　に等しいから

$$\alpha\cos(g(x))=\cos(\log x)-\sin(\log x)$$

である。右辺に対し単振動の合成を行うと

$$\alpha\cos(g(x))=\sqrt{2}\cos(\log x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\log x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\cos(\log x+(2n+\frac{1}{4})\pi)$$ (n は整数)

g(x) に課せられた条件より

$$\alpha=\sqrt{2},\ g(x)=\log x+\frac{\pi}{4}$$　(答)

(3) f(x) の極大点は f '(x) の分子、すなわち　$\alpha\cos(g(x))$　が 0　でその前後で f '(x) の符号が正から負に変わる点である。log x >0 だから g(x)>π/4 の範囲で極大点を探すと

$$g(x)=\frac{1}{2}\pi,\frac{5}{2}\pi,\frac{9}{2}\pi,\cdots,\frac{4n-3}{2}\pi,\cdots$$

n 番目は

$$g(a_n)=\frac{4n-3}{2}\pi\to\log a_n+\frac{\pi}{4}=\frac{4n-3}{2}\pi\to\log a_n=\frac{8n-7}{4}\pi\to a_n=e^{(8n-7)\pi/4}$$　(答)

(4)　$\log x=t,\ \frac{dx}{x}=dt$　と置換して

$$S_n=\int_1^{a_n}\frac{|\sin(\log x)|}{x}dx=\int_0^{(8n-7)\pi/4}|\sin t|\,dt$$

ところで sin x は周期 2π だが、| sin x | だと周期 π になる。よって

$$S_n=\int_0^{\pi}|\sin t|dt+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin t|\,dt+\cdots+\int_{(2n-3)\pi}^{(2n-2)\pi}|\sin t|\,dt+\int_{(2n-2)\pi}^{(8n-7)\pi/4}\sin t\,dt$$

$$=(2n-2)\int_0^{\pi}\sin t\,dt+\int_{(2n-2)\pi}^{(8n-7)\pi/4}\sin t\,dt$$

$$=(2n-2)[-\cos t]_0^{\pi}+[-\cos t]_0^{\pi/4}=2(2n-2)+(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=4n-3-\frac{1}{\sqrt{2}}$$　(答)

$$\lim\frac{S_n}{n}=\lim(4-\frac{3+1/\sqrt{2}}{n})=4-0=4$$　(答)

【IV】(1) 2 人とも当たる確率は $P(A)=\frac{2n}{n^2}\times\frac{2n-1}{n^2-1}=\frac{2(2n-1)}{n(n^2-1)}$, 2 人ともはずれる確率は

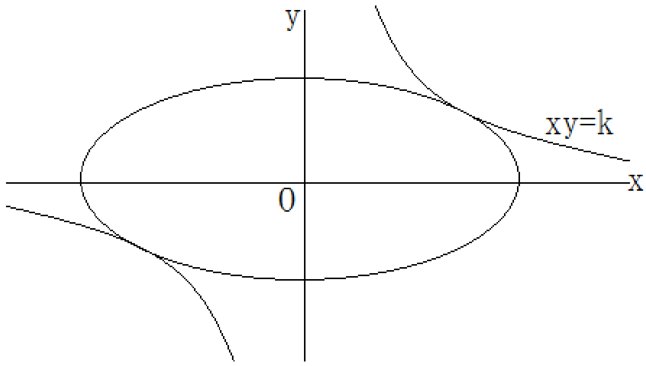
$P(B)=\frac{n^2-2n}{n^2}\times\frac{n^2-2n-1}{n^2-1}=\frac{(n-2)(n^2-2n-1)}{n(n^2-1)}$ で、 $P(B)-P(A)>0$ だから

$$\frac{(n-2)(n^2-2n-1)}{n(n^2-1)}-\frac{2(2n-1)}{n(n^2-1)}=\frac{n^3-4n^2-n+4}{n(n^2-1)}=\frac{(n-1)(n+1)(n-4)}{n(n-1)(n+1)}=\frac{n-4}{n}>0$$

分母は正だから、 $n>4$ になればよい。最小の n=5 (答)

(2) $z=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2-2\left(\frac{xy}{ab}\right)^2=1-2\left(\frac{xy}{ab}\right)^2$

となる楕円上の点 (x,y) が存在しなければならない。 $xy=k$ とおけば、この点は楕円と直角双曲線との交点である。2 曲線が共有点を持つ条件を調べる。連立して



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2x^2}=1 \quad ,$$

$$b^2x^4-a^2b^2x^2+a^2k^2=0$$

$x^2=t$ とおいて 2 次方程式 $b^2t^2-a^2b^2t+a^2k^2=0$ が t≧0 において実数解を持てばよい。そのための条件は

判別式= $a^4b^4-4a^2b^2k^2\geq 0$

よって $k^2\leq\frac{a^2b^2}{4}\to 0\leq(xy)^2\leq\frac{a^2b^2}{4}\to 0\leq\left(\frac{xy}{ab}\right)^2\leq\frac{1}{4}$. したがって

$$1-2\times 0=1\geq 1-2\left(\frac{xy}{ab}\right)^2\geq 1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\leq z\leq 1 \quad \text{(答)}$$

(3) $e^{2x}-1=(e^x+1)(e^x-1)$ に注意して

$$\log(e^x+1)^2(e^x-1)+\frac{(\log(e^x+1))^2}{\log(e^x-1)}=0 \quad ,$$

$$2\log(e^x+1)+\log(e^x-1)+\frac{(\log(e^x+1))^2}{\log(e^x-1)}=0 \quad ,$$

両辺を $\log(e^x-1)$ 倍して

$$2\log(e^x+1)\log(e^x-1)+(\log(e^x-1))^2+(\log(e^x+1))^2=0 \quad ,$$

$$\{\log(e^x+1)+\log(e^x-1)\}^2=0 \quad ,$$

$$\log(e^x+1)+\log(e^x-1)=0 \quad ,$$

$$\log(e^x+1)(e^x-1)=0 \quad ,$$

$$(e^x+1)(e^x-1)=1 \quad ,$$

$e^{2x}-1=1\to e^{2x}=2\to 2x=\log 2\to x=\frac{1}{2}\log 2=\log\sqrt{2}$ ④の答

(4)　$1+2i=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+i\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)$　とおく。(ただし　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$　)

$$a_n=\frac{i}{4}\sqrt{5}^n\{(\cos n\theta-i\sin n\theta)-(\cos n\theta+i\sin n\theta)\}=\frac{\sqrt{5}^n}{2}\sin n\theta$$

だから

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{5}^{n+1}}{2}\sin(n+1)\theta\ ,\ a_{n+2}=\frac{\sqrt{5}^{n+2}}{2}\sin(n+2)\theta$$

3 つの sin の関係を出しておこう。和・差を積に直す公式で

$$\sin(n+2)\theta+\sin n\theta=2\sin(n+1)\theta\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(n+1)\theta$$

よって

$$\frac{2}{\sqrt{5}^{n+2}}a_{n+2}+\frac{2}{\sqrt{5}^n}a_n=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}^{n+1}}a_{n+1}\ ,$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}+5a_n=0\quad (答)$$

(5)　$(n-1)^3=n^3-3n^2+3n-1$　を割ると、ふつうは

$$(n^3-3n^2+3n-1)\div(n^2-2n+2)=n-1\cdots-n+1$$

だが、これだと余りが負になってしまう。余り r は　$0\leq r<n^2-2n+2$　でなければならない。そこで商を 1 だけ小さくして n-2 にすればよかろう。

右図のように商は　$n-2$　, 余りは　n^2-3n+3　(答)

これでよいのは、　$n^2-3n+3=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$　,

$n^2-3n+3-(n^2-2n+2)=-n+1\leq-1$　より

$0\leq n^2-3n+3<n^2-2n+2$　が成り立つから。

$$\begin{array}{r}
n\quad -2\\
n^2-2n+2\ \overline{)\ n^3-3n^2+3n-1}\\
n^3-2n^2+2n\\
\hline
-n^2+n-1\\
-2n^2+4n-4\\
\hline
-n^2-3n+3
\end{array}$$