【1】(1) 2020を素因数分解すると　$2020=2^2\times5\times101$　だから3桁の素因数は101(ア)である。
一般に　$x^a\times y^b\times z^c$　約数の個数は　$(a+1)(b+1)(c+1)$　だから今の場合は

$$(2+1)(1+1)(1+1)=12$$　個(イ)

約数の和は　$(1+x+x^2+\cdots+x^a)(1+y+y^2+\cdots+y^b)(1+z+z^2+\cdots+z^c)$　だから今の場合は

$$(1+2+2^2)(1+5)(1+101)=4284$$　(ウ)

3桁の約数には101を因子として含むことは必須だから、残りの因子は

	1	2	4
1	1	2	4
5	5	10	20

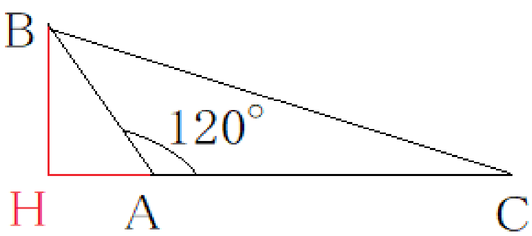
の中から探して1, 2, 4, 5の4個(エ)である(10, 20だと掛けて4桁になる)。

(2)　$\log_2(x+2)(2x-3)=2$　より　$(x+2)(2x-3)=2^2\to2x^2+x-10=0\to(2x+5)(x-2)=0$
ところが真数条件より　$x>-2, x>\dfrac{3}{2}$　だから　$x=2$　(オ)
$\log_2 x=X$　とおけば　$2X^2+5X-12=0\to(X+4)(2X-3)=0$　となる。
有理数解は　$X=\log_2 x=-4\to x=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$　(カ)であり、無理数解は
$X=\log_2 x=\dfrac{3}{2}\to x=2^{3/2}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$　(キ)である。

(3)　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$　だから　$a:b:c=7:5:3\to a=7k, b=5k, c=3k$
よって　$\cos A=\dfrac{25k^2+9k^2-49k^2}{2\cdot5k\cdot3k}=-\dfrac{1}{2}\to A=120^\circ$　(ク)
$AC=5k$　を直径とする円の面積は　$\pi\left(\dfrac{5k}{2}\right)^2=\dfrac{25\pi k^2}{4}$　であり、△ABCの面積は

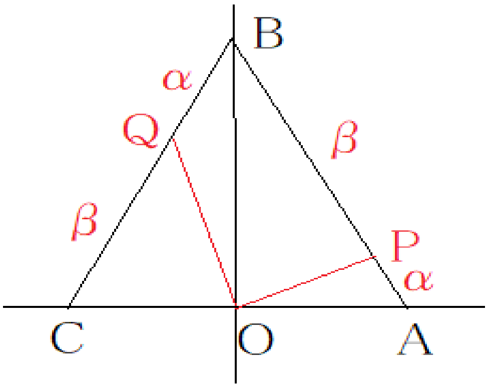
$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}5k\cdot3k\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}k^2}{4}$$

だから、その比は　$\dfrac{25\pi k^2}{4}/\dfrac{15\sqrt{3}k^2}{4}=\dfrac{25\pi}{15\sqrt{3}}=\dfrac{5\pi}{3\sqrt{3}}$　(ケ)



$AH=AB\cos60^\circ=\dfrac{3k}{2}$　だから外分比は　$AH:HC=\dfrac{3k}{2}:\left(\dfrac{3k}{2}+5k\right)=3:13$　(コ)

【2】



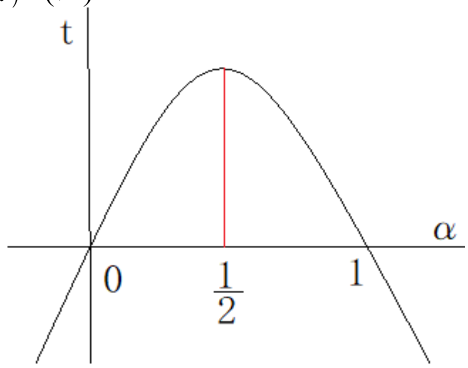
$\vec{OP}=(1-\alpha)\vec{OA}+\alpha\vec{OB}=(1-\alpha,0)+(0,\sqrt{3}\alpha)=(1-\alpha,\sqrt{3}\alpha)$ (ア)

$|\vec{OP}|=\sqrt{\beta^2+(\sqrt{3}\alpha)^2}=\sqrt{3\alpha^2+\beta^2}$ (イ)

$t=\alpha\beta=\alpha(1-\alpha)$ のグラフは右図のようになるから、

その値域は $0<t\leqq\frac{1}{4}$ である。(ウ)

ただし最大になるのは $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ のときである。



$\vec{OQ}=(1-\alpha)\vec{OB}+\alpha\vec{OC}=(-\alpha,\sqrt{3}\beta)$ だから内積は

$\vec{OP}\cdot\vec{OQ}=-\alpha(1-\alpha)+3\alpha\beta=-\alpha\beta+3\alpha\beta=2t$ (エ)

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2t$ (オ)

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(1-2t)^2-2t^2=2t^2-4t+1$ (カ)

$|\vec{OP}||\vec{OQ}|=\sqrt{3\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha^2+3\beta^2}=\sqrt{3\alpha^4+10\alpha^2\beta^2+3\beta^4}=\sqrt{3(2t^2-4t+1)+10t^2}$

$=\sqrt{16t^2-12t+3}$ (キ)

$\cos\theta=\frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{|\vec{OP}||\vec{OQ}|}=\frac{2t}{\sqrt{16t^2-12t+3}}=\frac{1}{\sqrt{4-\frac{3}{t}+\frac{3}{4t^2}}}$ の最右辺の分母に注目し、 $\frac{1}{t}=s$ とおいて

分母$=\sqrt{\frac{3}{4}s^2-3s+4}=\sqrt{\frac{3}{4}(s-2)^2+1}$ ただし $4\leqq s<\infty$ である。したがって

$2\leqq$ 分母 $<\infty$ で、分母が最小値をとるのは $s=4\left(t=\frac{1}{4}\right)$ のときである。よって

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}(s-2)^2+1}}$ の値の取る範囲は $0<\cos\theta\leqq\frac{1}{2}$ で、 $\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ (ク・ケ)

$\theta=\frac{\pi}{3}\to\cos\theta=\frac{1}{2}\to t=\frac{1}{4}$ だから $t=\alpha\beta=\alpha(1-\alpha)=\frac{1}{4}$ の方程式を解いて

$4\alpha^2-4\alpha+1=0\to(2\alpha-1)^2=0\to\alpha=\frac{1}{2}$ (コ)

【3】等比数列の一般項は $a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$ (ア) で、和は $\dfrac{3\cdot(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{3}{2}(3^n-1)$ (イ)

2 乗数の和は $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (ウ)

(*) に $n=1$ を代入すれば $a_1b_1c_1=\dfrac{1}{36}\cdot3\cdot5\cdot7\to3\cdot1\cdot c_1=\dfrac{35}{12}\to c_1=\dfrac{35}{36}$ (エ)

$T_n-T_{n-1}=\dfrac{1}{36}(2n+1)(2n+3)(2n+5)-\dfrac{1}{36}(2n-1)(2n+1)(2n+3)=\dfrac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$ (オ)

$n\geqslant2$ のとき $T_n-T_{n-1}=a_nb_nc_n=\dfrac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$ だから

$c_n=\dfrac{1}{6a_nb_n}(2n+1)(2n+3)=\dfrac{1}{6\cdot3^n}\cdot\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}\cdot(2n+1)(2n+3)=\dfrac{2n+3}{3^n n(n+1)}$ (カ)

$\lim n3^nc_n=\lim\dfrac{2n+3}{n+1}=\lim\dfrac{2+3/n}{1+1/n}=2$ (キ)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^nc_n}{2n+3}=\frac{3c_1}{5}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^nc_n}{2n+3}=\frac{7}{12}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ であり、最終辺のシグマは

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\lim\{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\}=\lim(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}$ だから

(ク) の答は $\dfrac{7}{12}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{13}{12}$

また $n\geqslant2$ のとき $c_n+\dfrac{1}{3^n(n+1)}=\dfrac{2n+3}{3^nn(n+1)}+\dfrac{1}{3^n(n+1)}=\dfrac{1}{3^{n-1}n}$ (ケ)

移項すれば $c_n=\dfrac{1}{3^{n-1}n}-\dfrac{1}{3^n(n+1)}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n=c_1+\sum_{n=2}^{\infty}\{\frac{1}{3^{n-1}n}-\frac{1}{3^n(n+1)}\}$ 右辺のシグマを先と同様に処理すると

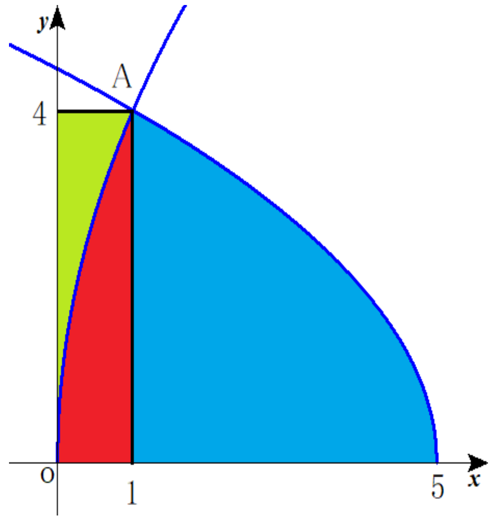
$\displaystyle\lim\{(\frac{1}{3\cdot2}-\frac{1}{9\cdot3})+(\frac{1}{9\cdot3}-\frac{1}{27\cdot4})+\cdots+(\frac{1}{3^{n-1}n}-\frac{1}{3^n(n+1)})\}=\lim\{\frac{1}{6}-\frac{1}{3^n(n+1)}\}=\frac{1}{6}$ だから

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n=c_1+\frac{1}{6}=\frac{35}{36}+\frac{1}{6}=\frac{41}{36}$ (コ)

【4】(1) $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}},\ g'(x)=-\dfrac{b}{2\sqrt{c-x}}$

(2) x 座標が 1 である点 A で交わるから $f(1)=g(1)\to a=b\sqrt{c-1}$ また接線が直交するから
$f'(1)g'(1)=-1\to \dfrac{a}{2}\cdot\left(-\dfrac{b}{2\sqrt{c-1}}\right)=-1\to ab=4\sqrt{c-1}$
2 つの等式を連立して $b^2\sqrt{c-1}=4\sqrt{c-1}\to b=2$
また 2 式から b を消去して $\dfrac{a}{\sqrt{c-1}}=\dfrac{4\sqrt{c-1}}{a}\to a^2=4(c-1)\to a=2\sqrt{c-1}$

(3) D の面積は $\displaystyle\int_0^1 a\sqrt{x}\,dx+\int_1^c b\sqrt{c-x}\,dx=\left[\frac{2}{3}ax^{3/2}\right]_0^1-\left[\frac{2}{3}b(c-x)^{3/2}\right]_1^c=\frac{40}{3}$ ということだから
$[ax^{3/2}]_0^1-[b(c-x)^{3/2}]_1^c=20\to a+b(c-1)^{3/2}=20$ ここで(2) で求めた結果を適用すると
$2\sqrt{c-1}+2(c-1)\sqrt{c-1}=20\to c\sqrt{c-1}=10\to c^2(c-1)=100$
3 次方程式を因数定理で解くと $c^3-c^2-100=0\to(c-5)(c^2+4c+20)=0\to c=5$
したがって $a=2\sqrt{c-1}=4, b=2, c=5$ となる。A の座標は $A(1,a)=(1,4)$



(4) $\displaystyle V_x=\pi\int_0^1(4\sqrt{x})^2dx+\pi\int_1^5(2\sqrt{5-x})^2dx$
$\displaystyle =16\pi\int_0^1 x\,dx+4\pi\int_1^5(5-x)\,dx$
$=8\pi[x^2]_0^1-2\pi[(5-x)^2]_1^5=8\pi+32\pi=40\pi$
y 軸回りのときは右図の緑の部分を差し引く。
曲線の方程式は $y=4\sqrt{x}\to x=\dfrac{y^2}{16},\ y=2\sqrt{5-x}\to x=5-\dfrac{y^2}{4}$
$\displaystyle V_y=\pi\int_0^4\left(5-\frac{y^2}{4}\right)^2dy-\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{16}\right)^2dy$
$\displaystyle =\pi\int_0^4\left(25-\frac{5y^2}{2}+\frac{y^4}{16}\right)dy-\pi\int_0^4\frac{y^4}{256}dy$
$\displaystyle =\pi\int_0^4\left(25-\frac{5y^2}{2}+\frac{15y^4}{256}\right)dy=\pi\left[25y-\frac{5}{6}y^3+\frac{3}{256}y^5\right]_0^4=\pi\left(100-\frac{160}{3}+12\right)=\frac{176}{3}\pi$