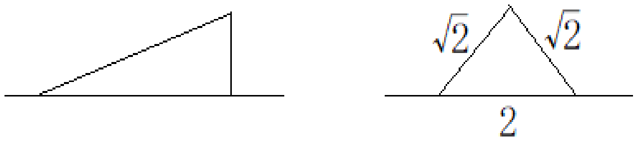
【1】(1) 面積＝底辺×高さ÷2 だから、底辺＝ $c-(-b)=b+c$ が偶数になればよい。2 個のサイコロの目の和が偶数だから、(偶,偶)または(奇,奇)で

$$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ (答)

(2) 図の 2 タイプが考えられるが、実際には左側の 1 タイプのみである。 $a=c$ より 2 個のサイコロの目が同じと考え、

$$p_2=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$ (答)



(3) 図のように a が真ん中に来ればよいから

$$a=\frac{-b+c}{2}$$

a は目の差の半分だから a= 1, 2 しかない。

ア) a= 1 の場合

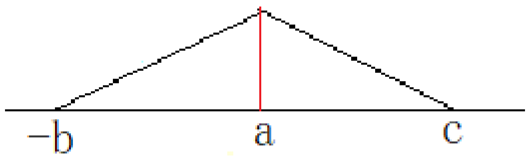
$$c-b=2\rightarrow(b,c)=(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)$$

イ) a= 2 の場合

$$c-b=4\rightarrow(b,c)=(1,5),(2,6)$$

よって

$$p_3=\frac{1}{6}\times\frac{4}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{36}=\frac{1}{36}$$ (答)

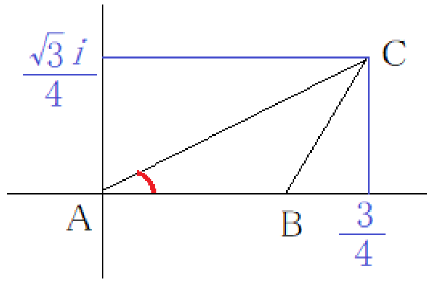


【2】(1) 関数 $w=\dfrac{z}{z+1}$ により、各点は以下のように写像される。

$$z=0\to w=\alpha=0 \quad , \qquad z=1\to w=\beta=\frac{1}{2} \quad ,$$

$$z=\sqrt{3}i\to w=\gamma=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i+1}=\frac{\sqrt{3}i(1-\sqrt{3}i)}{4}=\frac{3+\sqrt{3}i}{4}$$

∠BAC のタンジェントから、 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}/4}{3/4}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\to\theta=\dfrac{\pi}{6}$ (答)



(2) 関数 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ について、 $w(z+1)=z-1\to(w-1)z=-w-1\to z=-\dfrac{w+1}{w-1}$ と変形。

いま $|z|^2=2$ だから、これに代入して

$$\left|\frac{w+1}{w-1}\right|^2=2\to|w+1|^2=2|w-1|^2\to(w+1)(\bar{w}+1)=2(w-1)(\bar{w}-1) \quad ,$$

$$w\bar{w}-3w-3\bar{w}+1=0\to(w-3)(\bar{w}-3)=8\to|w-3|^2=8$$

よって、w は中心 3, 半径 $2\sqrt{2}$ の円周上を動く。(答)

【蛇足】円周に除外点があるかもというのは杞憂である。答の円は w=1 を通らないので逆写像が存在するからである。

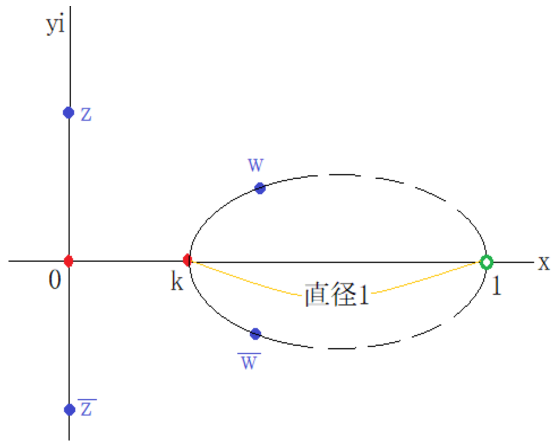
(3) 関数 $w=\dfrac{z+k}{z+1}$ について考える。

まず $z=0\to w=\dfrac{0+k}{0+1}=k$ と移る。

また、 $\bar{w}=\dfrac{\bar{z}+k}{\bar{z}+1}$ だから、 $z=yi$ と

$\bar{z}=-yi$ の 2 数は移った先でも共役である。

ということは、虚軸の像は実軸について対称の図形である。この像が円(その一部)なら w 平面の実軸はこの円の直径である。直径の一方の端点が 0 の像である k である。もう一方の端点はどこにあるだろうか。極限をとって



$$\lim_{y\to\infty}\frac{yi+k}{yi+1}=\lim\frac{i+k/y}{i+1/y}=1$$

のように写像されるから、直径は $|k-1|=1\to k=0,2$ (答)

しかしこれは必要条件だから、十分でもあることを確認しておく。

ア) k=0 の場合 $w=\dfrac{yi}{yi+1}=\dfrac{yi(1-yi)}{y^2+1}=\dfrac{y^2+yi}{y^2+1}$ で、中心は $\dfrac{k+1}{2}=\dfrac{1}{2}$ だから

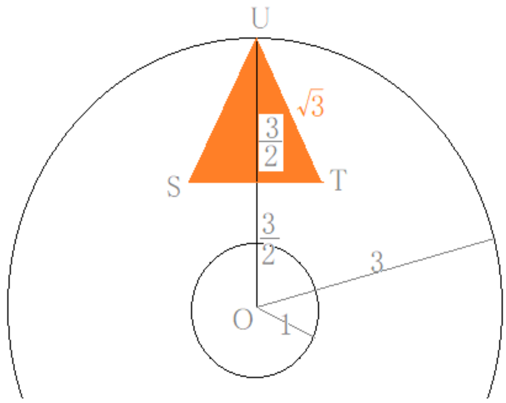
$$\left|\frac{y^2+yi}{y^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|2(y^2+yi)-(y^2+1)|}{2(y^2+1)}=\frac{\sqrt{(y^2-1)^2+4y^2}}{2(y^2+1)}=\frac{\sqrt{y^4+2y^2+1}}{2(y^2+1)}=\frac{1}{2}$$

イ) k=2 の場合 $w=\dfrac{yi+2}{yi+1}=\dfrac{(2+yi)(1-yi)}{y^2+1}=\dfrac{(y^2+2)-yi}{y^2+1}$ で、中心は $\dfrac{k+1}{2}=\dfrac{3}{2}$ だから

$$\left|\frac{(y^2+2)-yi}{y^2+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{|2(y^2+2-yi)-3(y^2+1)|}{2(y^2+1)}=\frac{\sqrt{(1-y^2)^2+4y^2}}{2(y^2+1)}=\frac{\sqrt{y^4+2y^2+1}}{2(y^2+1)}=\frac{1}{2}$$

【3】正三角形の高さは $\frac{3}{2}$ だから、点 P が原点 O に最も近いのは ST の中点のとき、最も遠いのは U に一致するときである。よって OP の長さを x とすれば

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 3$$



次に AB の中点を M とする。△OPA と△OAM は相似だから

$$x : \sqrt{x^2-1} : 1 = 1 : y : z$$

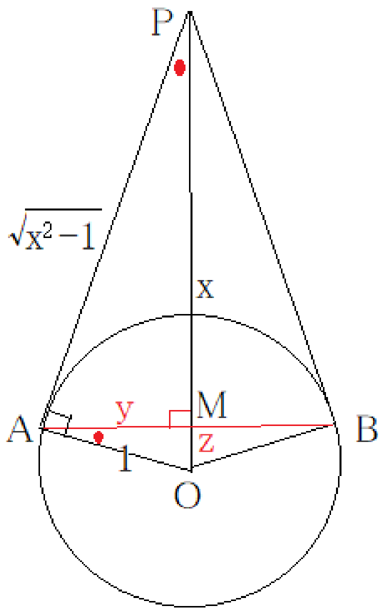
となり、 $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, z = \frac{1}{x}$ である。よって

$$V = \frac{1}{3}\pi AM^2 \cdot OM = \frac{1}{3}\pi y^2 z$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{x^2-1}{x^3} \quad ,$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2x \cdot x^3 - 3x^2(x^2-1)}{x^6} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{-x^4+3x^2}{x^6}$$

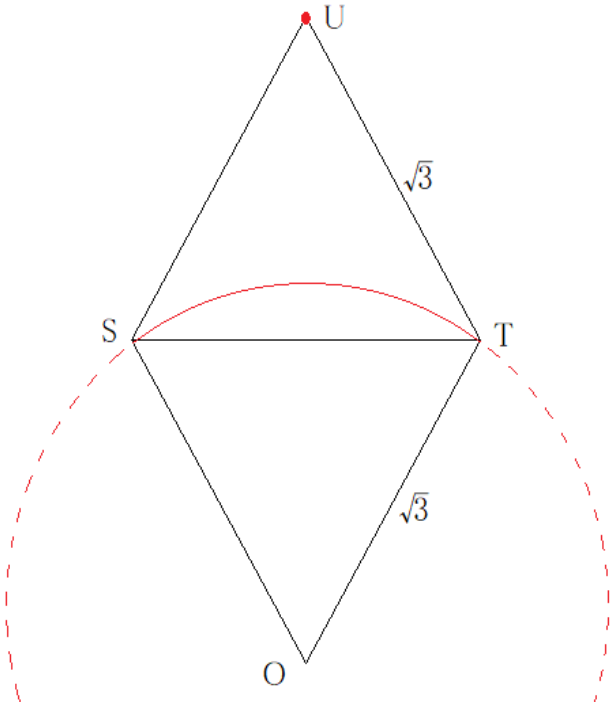
$$= -\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{x^2-3}{x^4}$$



x	$\frac{3}{2}$	…	$\sqrt{3}$	…	3
V'		+	0	−	
V	$\frac{10}{81}\pi$	↗	$\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi$	↘	$\frac{8}{81}\pi$

V の最大値は $V(\sqrt{3}) = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi$ ，最小値は $V(3) = \frac{8}{81}\pi$ (答)

原点からの距離 x =3 は点 U のことであり、 $x = \sqrt{3}$ は原点中心で点 S, T を通る円弧を意味する。(答) 図中の赤い部分。



【4】(1) 関数 $g(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}=\sin\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ は、 $-2\pi\leq x\leq\pi$ すなわち

$-\dfrac{\pi}{2}\leq\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{\pi}{2}$ において単調増加であるから $f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}g(x)+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ も単調増加である。■

(2) $F(x)=f(x)-x=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}g(x)+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}-x$ とおく。

$$F'(x)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}g'(x)-1=\frac{2\sqrt{2}\pi}{9}\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1$$

は、 $-2\pi\leq x\leq\pi$ において $0\leq\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq 1$ に注意すれば

$$F'(x)\leq\frac{2\sqrt{2}\pi}{9}-1\leq\frac{2\sqrt{2}\sqrt{10}}{9}-1=\frac{\sqrt{80}-\sqrt{81}}{9}<0$$

により単調減少。 $g(\pi)=1$ に注意すれば

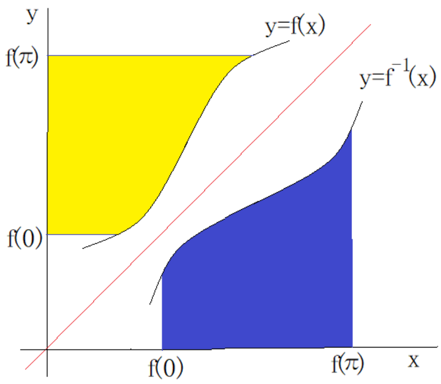
$$F(\pi)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}-\pi=0$$

だから、 $-2\pi\leq x\leq\pi$ において $F(x)\geq 0$, $-2\pi<x<\pi$ において $F(x)>0$ ■

(3) 逆関数の積分だが、一般論として

$$\int_{f(0)}^{f(\pi)}f^{-1}(x)dx=\int_{f(0)}^{f(\pi)}f^{-1}(y)dy$$

である。(右図参照)



今、求めたいのは右下図の黄色の面積である。

その面積は

$$S_1=\int_0^\pi\{f(\pi)-f(x)\}dx$$

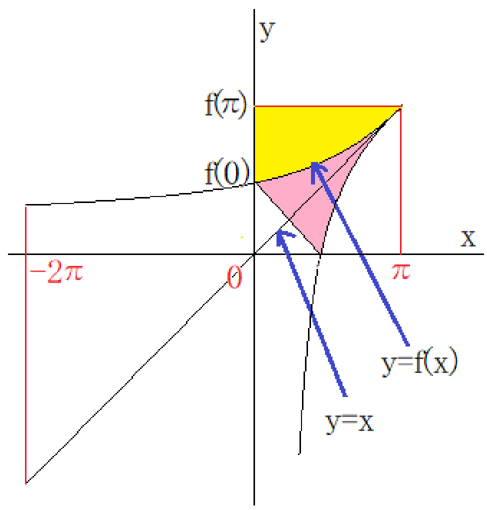
$$=\int_0^\pi\left\{\pi-\left(\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}g(x)+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^\pi\left\{-\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}g(x)+\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\right\}dx$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\int_0^\pi\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)dx$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left[3\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^\pi+\frac{2\sqrt{2}\pi^2}{3}$$

$$=-\sqrt{6}\pi+\frac{2\sqrt{2}\pi^2}{3}\quad(答)$$



(4) 求めるべきはピンクの面積だ。

$$S_2=2\int_0^\pi\{f(x)-x\}dx-\frac{1}{2}f(0)^2$$

$$=2\int_0^\pi\left\{\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}g(x)+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}-x\right\}dx-\frac{1}{2}f(0)^2$$

$$=-4\sqrt{2}\pi\left[\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^\pi+\frac{2(3-2\sqrt{2})\pi^2}{3}-[x^2]_0^\pi-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\pi^2$$

$$=2\sqrt{6}\pi+\frac{2(3-2\sqrt{2})\pi^2}{3}-\pi^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\pi^2$$

$$=2\sqrt{6}\pi+\left(\frac{7}{18}-\sqrt{2}\right)\pi^2\quad(答)$$