【第1問】【１】(1)　$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta-\sin\theta<0\to\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta<0$　より合成すれば

$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}<0\to\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)<0$$

$\frac{\pi}{3}\leq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$　の範囲で解を求めると　$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$　だから

$$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$$

(2) 解と係数の関係から　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{35}{25}=\frac{7}{5},\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{25}$　だが

$$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$$

に代入して　$\frac{49}{25}-\frac{2}{25}k=1\to k=12$

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5},\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$$

の連立方程式を解くと　$\sin\theta\left(\frac{7}{5}-\sin\theta\right)=\frac{12}{25}\to25\sin^2\theta-35\sin\theta+12=0$　より

$$(5\sin\theta-3)(5\sin\theta-4)=0$$

だから　$(\sin\theta,\cos\theta)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

ところが　$\sin\theta\geq\cos$　だったから解は後者である。

$\sin\theta=\frac{4}{5}$　となる　θ　の大きさはどれくらいだろうか。第1象限では sin は単調増加であることに注意する。

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{50}}{10}\ ,$$

$$\sin\theta=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{\sqrt{64}}{10}\ ,$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{75}}{10}$$

から、　$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$　③

【２】(1) 与式を２乗する。　$\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=9\to t^{\frac{2}{3}}-2+t^{-\frac{2}{3}}=9\to t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=11$

さらに　$\left(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=t^{\frac{2}{3}}+2+t^{-\frac{2}{3}}=13\to t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$　,

$$t-t^{-1}=\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)\left(t^{\frac{2}{3}}+1+t^{-\frac{2}{3}}\right)=-3(11+1)=-36$$

(2) 第１式は　$\log_3x+\frac{1}{2}\log_3y\leq5\to2X+Y\leq10$

第２式は底の変換公式で　$\frac{\log_3y/x^3}{\log_381}\leq1\to\log_3y-3\log_3x\leq4\to3X-Y\geq-4$

領域を図示すれば右図のピンクの部分。境界のかどの点が

$$\left(\frac{6}{5},\frac{38}{5}\right)=(1.2,7.6)$$

だからYの最大の整数値はY=7

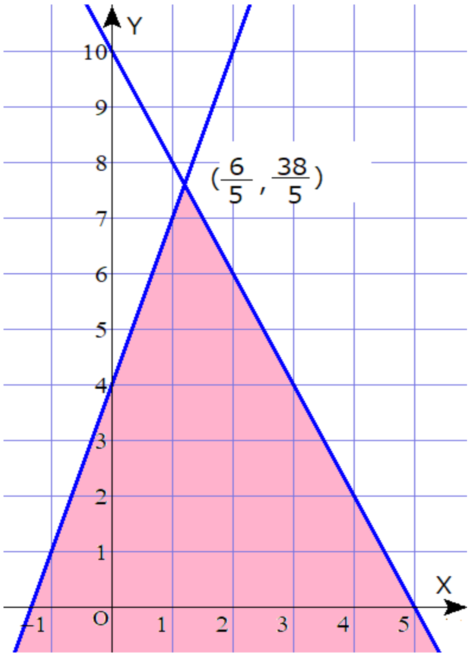
このとき

$$2X+7\leq 10, 3X-7\geq -4\rightarrow 1\leq X\leq \frac{3}{2}\ ,$$

$$1\leq \log_3 x\leq \frac{3}{2}\rightarrow 3^1\leq x\leq 3^{\frac{3}{2}}\rightarrow 3\leq x\leq 3\sqrt{3}$$

だから　$x\leq 3\sqrt{3}=\sqrt{27}$

最大の整数値は　$x=\sqrt{25}<\sqrt{27}$　より　$x=5$



【答】ア＝3, イ＝2, ウ＝3, エ＝3, オ＝2, カ＝3, キ＝5, ク＝3, ケコ＝12, サ＝4, シ＝5, ス＝3, セ＝5, ソ＝③, タチ＝11, ツテ＝13, トナニ＝－36, ヌ＝2, ネノ＝10, ハ＝3, ヒフ＝－4, ヘ＝7, ホ＝5

【第2問】(1)　$y'=2x+2$　より接線は

$$y=(2t+2)(x-t)+(t^2+2t+1)\rightarrow y=(2t+2)x-t^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$

同様に　$y'=2x-(4a-2)$　より

$$y=(2s-4a+2)(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1\rightarrow y=(2s-4a+2)(x-s)-s^2+4a^2+1$$

$$\cdots\cdots ②$$

①②を係数比較して

$$2t+2=2s-4a+2, -t^2+1=-s^2+4a^2+1\rightarrow t=s-2a\ ,\ t^2=s^2-4a^2$$

tを消去して

$$(s-2a)^2=s^2-4a^2\rightarrow -4as=-8a^2\rightarrow s=2a$$

tは　$t=s-2a=0$

したがって接線の方程式は

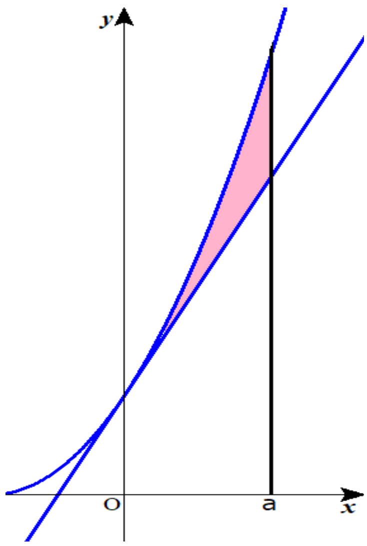
$$y=2x+1$$

(2) 2つのグラフの式を連立し

$$x^2-(4a-2)x+4a^2+1=x^2+2x+1\rightarrow -4ax+4a^2=0\rightarrow x=a$$

求めるべき面積は

$$S=\int_0^a((x^2+2x+1)-(2x+1))dx=\int_0^a x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$$

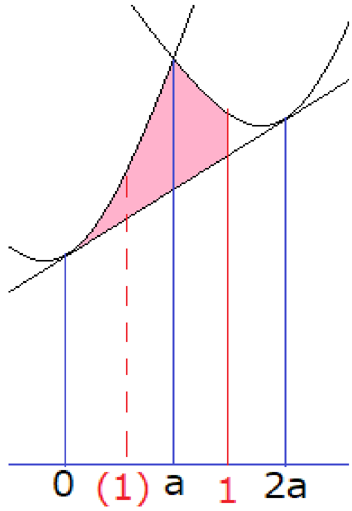


(3) 1がaの左に来るか、右に来るかで場合分け。

$a>1$　のときは次図の赤破線の左側の単純図形だから

$$T=\int_0^1 x^2\,dx=[\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}$$

一方の場合は　$a\leq 1\leq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq a\leq 1$　で、右図の 2 個の図形の合併だから



$$T=S+\int_a^1 ((x^2-(4a-2)x+4a^2+1)-(2x+1))\,dx$$

$$=S+\int_a^1 (x^2-4ax+4a^2)\,dx=S+[\frac{1}{3}x^3-2ax^2+4a^2x]_a^1$$

$$=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}(1-a^3)-2a(1-a^2)+4a^2(1-a)$$

$$=-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$$

(4)　$U=2T-3S=2(-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3})-3\cdot\frac{a^3}{3}=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\leq a\leq 1)$

を微分して

$$U'=-15a^2+16a-4=-(3a-2)(5a-2)$$

だから臨界点は　$a=\frac{2}{5},\frac{2}{3}$　であり、　$a=\frac{2}{5}$　で極小、　$a=\frac{2}{3}$　で極大。　$\frac{1}{2}\leq a\leq 1$　の範囲に入るのは後者で、そこで最大になる。最大値は

$$U=-5(\frac{2}{3})^3+8(\frac{2}{3})^2-4(\frac{2}{3})+\frac{2}{3}=\frac{-40+96-72+18}{27}=\frac{2}{27}$$

【答】ア＝2, イ＝2, ウ＝1, エ＝2, オ＝4, カ＝2, キ＝4, ク＝1, ケ＝0, コ＝2, サ＝2, シ＝1, ス＝a, セ＝3, ソ＝3, タ＝1, チ＝1, ツ＝3, テ＝2, ト＝4, ナ＝2, ニ＝1, ヌ＝3, ネ＝2, ノ＝3, ハ＝2, ヒフ＝27

【第3問】(1)　①に　$n=1$　を代入して

$$a_2=\frac{4}{2}\{3\times a_1+3^2-2\times 3\}=2(9-6)=6$$

(2)　$b_1=\dfrac{a_1}{3\times 2\times 3}=0$

①の両辺を割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}\times\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}\quad ,$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}\quad ,$$

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-(\frac{1}{3})^{n+1}$$

部分分数分解は　$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$　だから

$$b_{n+1}-b_n=(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})-(\frac{1}{3})^{n+1} \quad \cdots\cdots(*)$$

右辺第1項は、階差の和の性質により

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}(\frac{n-1}{n+1})$$

右辺第2項は、等比数列の和の公式により

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{3})^{k+1}=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{1}{9}\times\{1-(\frac{1}{3})^{n-1}\}/(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{6}\{1-(\frac{1}{3})^{n-1}\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n}$$

この結果と(*)をまとめれば

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=0+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})-\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{3})^{k+1}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{n-1}{n+1})-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n}=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n}$$

(3) $a_n=3^n(n+1)(n+2)b_n=3^n(n+1)(n+2)\{\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n}\}$

$$=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(4) まず $a_n=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ の第1項は $n\geq3$ だから3の倍数である。第2項の $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

だけ考えればよい。

$n=3k$ のとき $a_{3k}\equiv\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}=\frac{9k^2+9k+2}{2}=\frac{9k(k+1)}{2}+1\equiv1(mod.3)$,

$n=3k+1$ のとき $a_{3k+1}\equiv\frac{(3k+2)(3k+3)}{2}=\frac{9k^2+15k+6}{2}=\frac{9k(k+1)}{2}+3(k+1)\equiv0(mod.3)$,

$n=3k+2$ のとき $a_{3k+2}\equiv\frac{(3k+3)(3k+4)}{2}=\frac{9k^2+21k+12}{2}=\frac{9k(k+1)}{2}+6(k+1)\equiv0(mod.3)$,

n が3の倍数のときのみ $\equiv1(mod.3)$ で、他は $\equiv0(mod.3)$ である。

よって

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=a_3+a_6+\cdots+a_{2019}$$

だが $2019\div3=673, 673\div3=224\cdots1$ より

$$a_3+a_6+\cdots+a_{2019}=(a_3+a_6+a_9)+(a_{12}+\cdots)+\cdots+(\cdots+a_{2016})+a_{2019}\equiv0+0+\cdots+0+1\equiv1$$

だから3で割った余りは1である。

【答】ア＝6, イ＝0, ウ＝1, エ＝1, オ＝2, カ＝3, キ＝1, ク＝2, ケ＝1, コ＝1, サ＝1, シ＝6, ス＝1, セ＝2, ソ＝2, タ＝3, チ＝1, ツ＝3, テ＝1, ト=4, ナ＝1, ニ＝2, ヌ＝2, ネ＝1, ノ＝0, ハ＝0, ヒ＝1

【第4問】(1) $|\vec{OA}|=\sqrt{3^2+3^2+(-6)^2}=3\sqrt{6}$,

$|\vec{OB}|=\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{3}$,

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=3(2+2\sqrt{3})+3(2-2\sqrt{3})+24=36$$

(2) $\vec{OC}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ と内積をとって

$$\vec{OA}\cdot\vec{OC}=s|\vec{OA}^2|+t\vec{OA}\cdot\vec{OB}=(3\sqrt{6})^2 s+36t=54s+36t=0 \quad ,$$
$$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=36s+t(4\sqrt{3})^2=36s+48t=24$$

だから $s=\frac{-2}{3}, t=1$

したがって

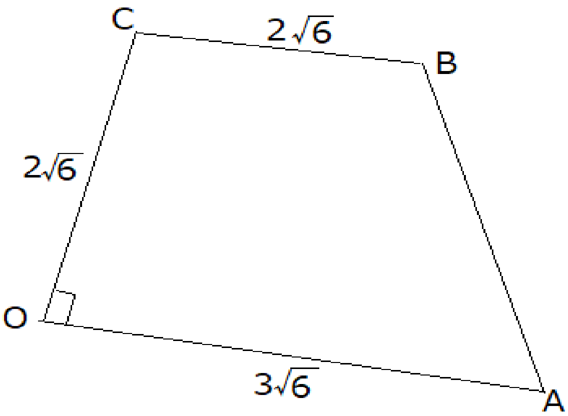
$$\vec{OC}=\frac{-2}{3}\vec{OA}+1\vec{OB}=\frac{-2}{3}(3,3,-6)+(2+2\sqrt{3},2-2\sqrt{3},-4)=(2\sqrt{3},-2\sqrt{3},0)$$

だから

$$|\vec{OC}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2+0}=2\sqrt{6}$$

(3) $\vec{CB}=\vec{OB}-\vec{OC}=(2+2\sqrt{3},2-2\sqrt{3},-4)-(2\sqrt{3},-2\sqrt{3},0)=(2,2,-4)$

ところで $\vec{OA}=(3,3,-6)$ だったから $\vec{OA}=\frac{3}{2}\vec{CB}$



つまり対辺が平行で長さが等しくない。
台形の③だ。
台形の面積は

$$\frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{6})2\sqrt{6}}{2}=30$$

(4) $\vec{OD}=(x,y,1)$ とおく。

$$\vec{OA}\cdot\vec{OD}=3x+3y-6=0 \quad ,$$
$$\vec{OC}\cdot\vec{OD}=2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y=2\sqrt{6}$$

だから

$$x+y=2 \quad ,$$
$$x-y=\sqrt{2}$$

これより $(x,y,1)=(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

角度は

$$\cos\angle COD=\frac{\vec{OC}\cdot\vec{OD}}{|\vec{OC}||\vec{OC}|}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{x^2+y^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=1/\sqrt{(1+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1}=\frac{1}{2}$$

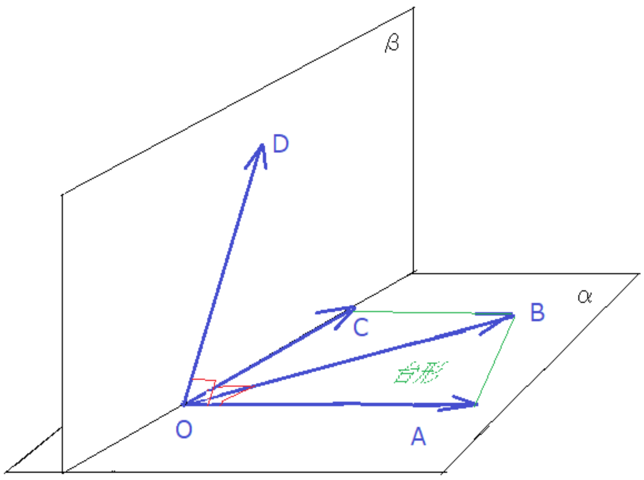
より $\angle COD=60^\circ$

台形OABCでなく△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}BC\times OC=\frac{1}{2}2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}=12$$

で高さは

$$h=OD\sin\angle COD$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+1}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$



だから四面体の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\times h$$
$$=\frac{1}{3}\cdot12\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

【答】ア＝3, イ＝6, ウ＝4, エ＝3, オカ＝36, キク＝－2, ケ＝3, コ＝1, サ＝2, シ＝6, ス＝2, セ＝2, ソタ＝－4, チ＝③, ツテ＝30, ト＝1, ナ＝2, ニ＝2, ヌ＝1, ネ＝2, ノ＝2, ハヒ＝60, フ＝3, ヘ＝4, ホ＝3

【第5問】(1) $E(X)=\frac{0\times612}{720}+\frac{1\times54}{720}+\frac{2\times36}{720}+\frac{3\times18}{720}=\frac{54+72+54}{720}=\frac{180}{720}=\frac{1}{4}$,

$E(X^2)=\frac{0\times612}{720}+\frac{1\times54}{720}+\frac{4\times36}{720}+\frac{9\times18}{720}=\frac{54+144+162}{720}=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}$

で分散は 2 乗の平均－平均の 2 乗だから

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

よって

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

(2) 平均は np 、標準偏差は $\sqrt{npq}=\sqrt{np(1-p)}$ という公式を使う。

平均は $E(Y)=np=600\times0.4=240$,

標準偏差は $\sigma(Y)=\sqrt{npq}=\sqrt{600\times0.4\times0.6}=\sqrt{144}=12$

Y が 215 以下だと $Z=\frac{Y-240}{12}\leq\frac{215-240}{12}=-2.08$

z 値がこの値以下は、2.08 以上の値を取る確率に等しいから、正規分布表から

2.8 →0.4812

と引いて、求めるべき確率は $0.5-0.4812=0.0188=0.02$ である。

$p=0.2$ だと平均は $E(Y')=np=600\times0.2=120$ で $\frac{1}{2}$ 倍、標準偏差は

$\sigma(Y')=\sqrt{npq}=\sqrt{600\times0.2\times0.8}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ で $\frac{4\sqrt{6}}{12}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 倍である。

(3) 公式 $E(aX+b)=aE(X)+b, V(aX+b)=a^2V(X), \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$ を使う。

確率変数 U は

$E(U)=E(W-60)=E(W)-60=m-60$,

$\sigma(U)=\sigma(W-60)=\sigma(W)=30$

に従う。 $U=W-60$ の母平均 $t=m-60$ の 95%信頼区間は、 $U=W-60$ の標本平均が 50 だったから

$50-\frac{1.96\times\sigma}{\sqrt{n}}\leq t\leq50+\frac{1.96\times\sigma}{\sqrt{n}}$,すなわち

$50-\frac{1.96\times30}{\sqrt{100}}\leq t\leq50+\frac{1.96\times30}{\sqrt{100}}$ で $44.1\leq t\leq55.9$

【答】ア＝1, イ＝4, ウ＝1, エ＝2, オ＝7, カ＝4, キクケ＝240, コサ＝12, シス＝02, セ＝2, ソ＝6, タチ＝60, ツテ＝30, トナ＝44, ニ＝1, ヌネ＝55, ノ＝9