数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔1〕

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる θ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos\theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin\theta$$

である。よって，三角関数の合成を用いると，① は

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$$

と変形できる。したがって，求める範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，k を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は x の2次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により $\sin\theta + \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の値を考えれば，$k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。

さらに，θ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。このとき，θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{12}$　①　$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$　②　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

③　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　④　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　⑤　$\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕

(1) t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{タチ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}},\quad t - t^{-1} = \boxed{\text{トナニ}}$$

である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

(2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \cdots\cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

について考える。

$X = \log_3 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと，② は

$$\boxed{\text{ヌ}}\,X + Y \leqq \boxed{\text{ネノ}} \qquad \cdots\cdots ④$$

と変形でき，③ は

$$\boxed{\text{ハ}}\,X - Y \geqq \boxed{\text{ヒフ}} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

と変形できる。

X, Y が ④ と ⑤ を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。また，x, y が ②，③ と $\log_3 y = \boxed{\text{ヘ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

第2問 (配点 30)

$a>0$ とし，$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ とおく。座標平面上で，放物線 $y=x^2+2x+1$ を C，放物線 $y=f(x)$ を D とする。また，ℓ を C と D の両方に接する直線とする。

(1) ℓ の方程式を求めよう。

ℓ と C は点 $(t,\ t^2+2t+1)$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,t+\boxed{\text{イ}}\right)x-t^2+\boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。また，ℓ と D は点 $(s,\ f(s))$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{エ}}\,s-\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}\right)x-s^2+\boxed{\text{キ}}\,a^2+\boxed{\text{ク}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。ここで，①と②は同じ直線を表しているので，$t=\boxed{\text{ケ}}$，$s=\boxed{\text{コ}}\,a$ が成り立つ。

したがって，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) 二つの放物線 C, D の交点の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ である。

C と直線 ℓ, および直線 $x = \boxed{\text{ス}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると,

$$S = \frac{a^{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$ である。

(3) $a \geqq \dfrac{1}{2}$ とする。二つの放物線 C, D と直線 ℓ で囲まれた図形の中で $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分の面積 T は, $a > \boxed{\text{タ}}$ のとき, a の値によらず

$$T = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり, $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \boxed{\text{タ}}$ のとき

$$T = -\boxed{\text{テ}}a^3 + \boxed{\text{ト}}a^2 - \boxed{\text{ナ}}a + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

(4) 次に, (2), (3) で定めた S, T に対して, $U = 2T - 3S$ とおく。a が $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \boxed{\text{タ}}$ の範囲を動くとき, U は $a = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ をとる。

第3問 (配点 20)

Oを原点とする座標平面上に点A(0, 6)がある。点Aを通る傾きmの直線をℓとし，中心が点(0, 2)でx軸に接する円をCとする。

(1) 直線ℓの方程式は$y = mx + \boxed{\text{ア}}$である。また，円$C$の方程式は$x^2 + \left(y - \boxed{\text{イ}}\right)^2 = \boxed{\text{ウ}}$である。

(2) $m = \pm\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$のとき，直線$\ell$と円$C$は接する。$m = -\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$のときの接点の座標は$\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$である。

(3) 直線ℓと円Cが異なる2点で交わるようなmのうち，最小の正の整数は$\boxed{\text{キ}}$である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(4) 直線ℓが点B(3, 0)を通るとき，$m = $ **クケ** である。さらに，直線ℓと円Cの二つの交点を点Aに近い方から順に点D，点Eとすれば，座標はそれぞれ

$$\mathrm{D}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right),\quad \mathrm{E}\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}\right)$$

である。

このとき，次のように△ODEの面積Sを求めよう。まず，△OABの面積は **チ** である。また，点A，D，E，Bの各x座標の値により，三つの線分AD，DE，EBの長さの比は

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DE}:\mathrm{EB} = \boxed{\text{ツ}} : \boxed{\text{テ}} : 5$$

であることがわかる。このことから，$S = \dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第4問 （配点　20）

4次の整式 $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 21x + 18$ について考える。

(1) 方程式 $P(x) = 0$ の解を求めよう。

$P(0) \neq 0$ であるから，$x = 0$ は $P(x) = 0$ の解ではない。そこで，$P(x) = 0$ の両辺を x^2 で割ると

$$2x^2 - 7x + 8 - \frac{21}{x} + \frac{18}{x^2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を得る。$t = x + \dfrac{3}{x}$ とおき，① の左辺を t を用いて表すことにより

$$\boxed{\text{ア}}\,t^2 - \boxed{\text{イ}}\,t - \boxed{\text{ウ}} = 0$$

を得る。これを解くと，$t = \boxed{\text{エ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。

$t = \boxed{\text{エ}}$ のとき，$x = \boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}}$ とする。

また，$t = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき，$x = \dfrac{\boxed{\text{コサ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シス}}}\,i}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(2) $\alpha = 1 - \sqrt{3}\,i$ に対して，$P(\alpha)$ の値を求めよう。

$(\alpha - 1)^2 = \boxed{\text{ソタ}}$ である。これを整理すると

$$\alpha^2 - \boxed{\text{チ}}\,\alpha + \boxed{\text{ツ}} = 0$$

である。

$P(x)$ を $x^2 - \boxed{\text{チ}}\,x + \boxed{\text{ツ}}$ で割ると，商は

$$\boxed{\text{テ}}\,x^2 - \boxed{\text{ト}}\,x - \boxed{\text{ナ}}$$

で，余りは

$$\boxed{\text{ニヌネ}}\left(x - \boxed{\text{ノ}}\right)$$

である。

したがって，$P(\alpha) = \boxed{\text{ハヒ}}\left(\boxed{\text{フ}} + \sqrt{3}\,i\right)$ である。

数　学　Ⅱ（100点満点）

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点
第1問 (30)	$\dfrac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$，ウ	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，3	2
	$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{\text{エ}}\right)$	$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$	2
	$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$，$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{5}{3}$	3
	ケコ	12	2
	$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{4}{5}$	2
	$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$	$\dfrac{3}{5}$	2
	ソ	3	2
	タチ	11	3
	$\sqrt{\text{ツテ}}$	$\sqrt{13}$	2
	トナニ	-36	2
	ヌ $X+Y \leqq$ ネノ	$2X+Y \leqq 10$	2
	ハ $X-Y \geqq$ ヒフ	$3X-Y \geqq -4$	2
	ヘ	7	2
	ホ	5	2
第2問 (30)	ア $t+$ イ	$2t+2$	2
	ウ	1	2
	エ $s-$ オ $a+$ カ	$2s-4a+2$	2
	キ a^2+ ク	$4a^2+1$	2
	ケ，コ	0，2	3
	サ $x+$ シ	$2x+1$	2
	ス	a	2
	$\dfrac{a^{\text{セ}}}{\text{ソ}}$	$\dfrac{a^3}{3}$	3
	タ	1	2
	$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{1}{3}$	3

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点
（第2問）	テ，ト，ナ，$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$	2，4，2，$\dfrac{1}{3}$	3
	$\dfrac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$	$\dfrac{2}{3}$	3
	$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒフ}}$	$\dfrac{2}{27}$	1
第3問 (20)	ア	6	1
	イ，ウ	2，4	2
	$\sqrt{\text{エ}}$	$\sqrt{3}$	2
	$(\sqrt{\text{オ}}$，カ$)$	$(\sqrt{3}$，$3)$	2
	キ	2	2
	クケ	-2	2
	$\left(\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}，\dfrac{\text{シス}}{\text{セ}}\right)$	$\left(\dfrac{6}{5}，\dfrac{18}{5}\right)$	2
	(ソ，タ)	(2，2)	2
	チ	9	1
	ツ，テ	6，4	2
	$\dfrac{\text{トナ}}{\text{ニ}}$	$\dfrac{12}{5}$	2
第4問 (20)	ア t^2- イ $t-$ ウ	$2t^2-7t-4$	3
	エ，$\dfrac{\text{オカ}}{\text{キ}}$	4，$\dfrac{-1}{2}$	2
	ク，ケ	1，3	1
	$\dfrac{\text{コサ}\pm\sqrt{\text{シス}}\,i}{\text{セ}}$	$\dfrac{-1\pm\sqrt{47}\,i}{4}$	2
	ソタ	-3	2
	α^2- チ $\alpha+$ ツ	$\alpha^2-2\alpha+4$	3
	テ x^2- ト $x-$ ナ	$2x^2-3x-6$	2
	ニヌネ $(x-$ ノ $)$	$-21(x-2)$	2
	ハヒ $($フ $+\sqrt{3}i)$	$21(1+\sqrt{3}i)$	3