【第1問】【1】(1)　$\sqrt{3}\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta-\sin\theta<0\to\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta<0$　より合成すれば

$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}<0\to\sin(\theta+\frac{\pi}{3})<0$$

$\frac{\pi}{3}\le\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$　の範囲で解を求めると　$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$　だから

$$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$$

(2) 解と係数の関係から　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{35}{25}=\frac{7}{5},\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{25}$　だが

$$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta$$

に代入して　$\frac{49}{25}-\frac{2}{25}k=1\to k=12$

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5},\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$$

の連立方程式を解くと　$\sin\theta(\frac{7}{5}-\sin\theta)=\frac{12}{25}\to25\sin^2\theta-35\sin\theta+12=0$　より

$$(5\sin\theta-3)(5\sin\theta-4)=0$$

だから　$(\sin\theta,\cos\theta)=(\frac{3}{5},\frac{4}{5}),(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

ところが　$\sin\theta\ge\cos$　だったから解は後者である。

$\sin\theta=\frac{4}{5}$　となる　θ　の大きさはどれくらいだろうか。第1象限では sin は単調増加であることに注意する。

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{50}}{10}\ ,$$

$$\sin\theta=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{\sqrt{64}}{10}\ ,$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{75}}{10}$$

から、　$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$　③

【2】(1) 与式を2乗する。　$(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})^2=9\to t^{\frac{2}{3}}-2+t^{-\frac{2}{3}}=9\to t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=11$

さらに　$(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}})^2=t^{\frac{2}{3}}+2+t^{-\frac{2}{3}}=13\to t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$　,

$$t-t^{-1}=(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})(t^{\frac{2}{3}}+1+t^{-\frac{2}{3}})=-3(11+1)=-36$$

(2) 第1式は　$\log_3x+\frac{1}{2}\log_3y\le5\to2X+Y\le10$

第2式は底の変換公式で　$\frac{\log_3y/x^3}{\log_381}\le1\to\log_3y-3\log_3x\le4\to3X-Y\ge-4$

領域を図示すれば右図のピンクの部分。境界のかどの点が

$$\left(\frac{6}{5},\frac{38}{5}\right)=(1.2,7.6)$$

だからYの最大の整数値はY=7

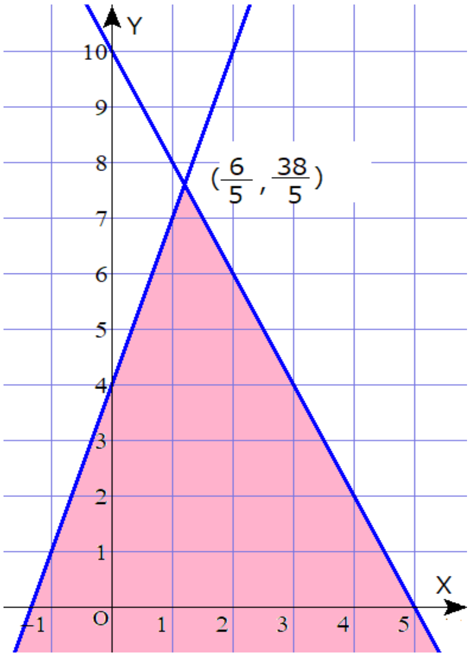
このとき

$$2X+7\leq 10, 3X-7\geq -4 \to 1\leq X\leq \frac{3}{2} \ ,$$

$$1\leq \log_3 x\leq \frac{3}{2} \to 3^1\leq x\leq 3^{\frac{3}{2}} \to 3\leq x\leq 3\sqrt{3}$$

だから　$x\leq 3\sqrt{3}=\sqrt{27}$

最大の整数値は　$x=\sqrt{25}<\sqrt{27}$　より　$x=5$



【答】ア＝3, イ＝2, ウ＝3, エ＝3, オ＝2, カ＝3, キ＝5, ク＝3, ケコ＝12, サ＝4, シ＝5, ス＝3, セ＝5, ソ＝③, タチ＝11, ツテ＝13, トナニ＝－36, ヌ＝2, ネノ＝10, ハ＝3, ヒフ＝－4, ヘ＝7, ホ＝5

【第2問】(1)　$y'=2x+2$　より接線は

$$y=(2t+2)(x-t)+(t^2+2t+1)\to y=(2t+2)x-t^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$

同様に　$y'=2x-(4a-2)$　より

$$y=(2s-4a+2)(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1\to y=(2s-4a+2)(x-s)-s^2+4a^2+1 \quad \cdots\cdots ②$$

①②を係数比較して

$$2t+2=2s-4a+2, -t^2+1=-s^2+4a^2+1\to t=s-2a, t^2=s^2-4a^2$$

t を消去して

$$(s-2a)^2=s^2-4a^2\to -4as=-8a^2\to s=2a$$

t は　$t=s-2a=0$

したがって接線の方程式は

$$y=2x+1$$

(2) 2 つのグラフの式を連立し

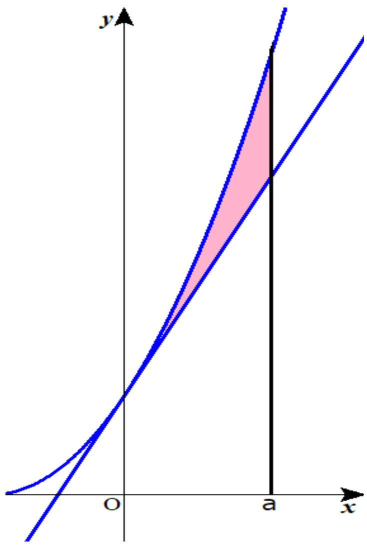
$$x^2-(4a-2)x+4a^2+1=x^2+2x+1\to -4ax+4a^2=0\to x=a$$

求めるべき面積は

$$S=\int_0^a((x^2+2x+1)-(2x+1))dx=\int_0^a x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$$

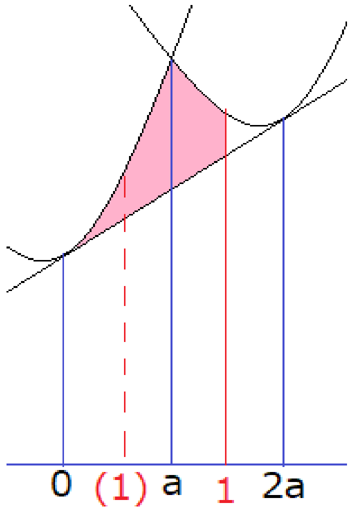
(3) 1 が a の左に来るか、右に来るかで場合分け。

$a>1$　のときは次図の赤破線の左側の単純図形だから



$$T=\int_0^1 x^2dx=[\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}$$

一方の場合は $a\le 1\le 2\text{a}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le a\le 1$ で、右図の2個の図形の合併だから



$$T=S+\int_a^1((x^2-(4a-2)x+4a^2+1)-(2x+1))dx$$

$$=S+\int_a^1(x^2-4ax+4a^2)dx=S+[\frac{1}{3}x^3-2ax^2+4a^2x]_a^1$$

$$=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}(1-a^3)-2a(1-a^2)+4a^2(1-a)$$

$$=-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$$

(4) $U=2T-3S=2(-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3})-3\cdot\frac{a^3}{3}=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\le a\le 1)$

を微分して

$$U'=-15a^2+16a-4=-(3a-2)(5a-2)$$

だから臨界点は $a=\frac{2}{5},\frac{2}{3}$ であり、 $a=\frac{2}{5}$ で極小、 $a=\frac{2}{3}$ で極大。 $\frac{1}{2}\le a\le 1$ の範囲に入るのは後者で、そこで最大になる。最大値は

$$U=-5(\frac{2}{3})^3+8(\frac{2}{3})^2-4(\frac{2}{3})+\frac{2}{3}=\frac{-40+96-72+18}{27}=\frac{2}{27}$$

【答】ア＝2, イ＝2, ウ＝1, エ＝2, オ＝4, カ＝2, キ＝4, ク＝1, ケ＝0, コ＝2, サ＝2, シ＝1, ス＝a, セ＝3, ソ＝3, タ＝1, チ＝1, ツ＝3, テ＝2, ト＝4, ナ＝2, ニ＝1, ヌ＝3, ネ＝2, ノ＝3, ハ＝2, ヒフ＝27

【第3問】(1) y 切片＝6だから $y=mx+6$
円の半径は2だから $x^2+(y-2)^2=4$

(2) 連立して $x^2+(mx+6-2)^2=4\to(1+m^2)x^2+8mx+12=0$ ……(*)
判別式＝0で

$$\frac{D}{4}=16m^2-12(1+m^2)=0\to 4m^2-12=0\to m=\pm\sqrt{3}$$

(*) に $m=-\sqrt{3}$ を代入して $4x^2-8\sqrt{3}x+12=0\to(x-\sqrt{3})^2=0\to x=\sqrt{3}$
したがって接点は $(x,y)=(\sqrt{3},-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+6)=(\sqrt{3},3)$

(3) 今度は判別式＞0だから $4m^2-12>0\to m<-\sqrt{3},\sqrt{3}<m$
最小正整数 m は $1.73=\sqrt{3}<m\to 2\le m$ より m=2

(4) $(x,y)=(3,0)$ を代入すれば $0=3m+6\to m=-2$
連立方程式を解くと(*) より

$$5x^2-16x+12=0 \to (5x-6)(x-2)=0 \to x=\frac{6}{5},2$$

よって交点は

$$(x,y)=\left(\frac{6}{5},-2\cdot\frac{6}{5}+6\right)=\left(\frac{6}{5},\frac{18}{5}\right),(x,y)=(2,-2\cdot 2+6)=(2,2)$$

△OAB の面積は

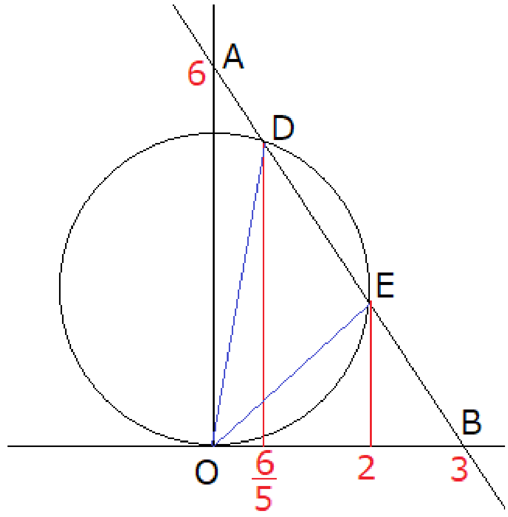
$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=9$$

線分の比は

$$AD:DE:EB=\frac{6}{5}:\left(2-\frac{6}{5}\right):(3-2)=\frac{6}{5}:\frac{4}{5}:1=6:4:5$$

よって求めるべき面積は

$$S=\frac{4}{6+4+5}\times 9=\frac{12}{5}$$



【答】ア＝6, イ＝2, ウ＝4, エ＝3, オ＝3, カ＝3, キ＝2, クケ＝−2, コ＝6, サ＝5, シス＝18, セ＝5, ソ＝2, タ＝2, チ＝9, ツ＝6, テ＝4, トナ＝12, ニ＝5

【第4問】(1)　$t=x+\frac{3}{x} \to t^2=x^2+6+\frac{9}{x^2}$　だから

$$2\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{3}{x}\right)+8=2(t^2-6)-7t+8=2t^2-7t-4=0$$

これを解けば

$$(t-4)(2t+1)=0 \to t=4,\frac{-1}{2}$$

$t=4$　のとき　$x+\frac{3}{x}=4 \to x^2-4x+3=0 \to (x-1)(x-3)=0 \to x=1,3$

$t=\frac{-1}{2}$　のとき　$x+\frac{3}{x}=\frac{-1}{2} \to 2x^2+x+6=0 \to x=\frac{-1\pm\sqrt{47}i}{4}$

(2)　$(\alpha-1)^2=(1-\sqrt{3}i-1)^2=-3$　だから

$$\alpha^2-2\alpha+1=-3 \to \alpha^2-2\alpha+4=0$$

割り算をすれば商は　$2x^2-3x-6$　,

余りは　$-21x+42=-21(x-2)$

したがって

$$P(x)=(x^2-2x+4)(2x^2-3x-6)-21(x-2)$$

に　$x=\alpha$　を代入すれば

$$P(\alpha)=0-21(\alpha-2)=-21(1-\sqrt{3}i-2)=21(1+\sqrt{3}i)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & 2 & -3 & -6 \\
\hline
1\ -2\ 4 & 2 & -7 & 8 & -21 & 18 \\
 & 2 & -4 & 8 & & \\
\hline
 & & -3 & 0 & -21 & \\
 & & -3 & 6 & -12 & \\
\hline
 & & & -6 & -9 & 18 \\
 & & & -6 & 12 & -24 \\
\hline
 & & & & -21 & 42
\end{array}$$

【答】ア＝2, イ＝7, ウ＝4, エ＝4, オカ＝－1, キ＝2, ク＝1, ケ＝3, コサ＝－1, シス＝47, セ＝4, ソタ＝－3, チ＝2, ツ＝4, テ＝2, ト＝3, ナ＝6, ニヌネ＝－21, ノ＝2, ハヒ＝21, フ＝1