【第1問】

【1】(1)　$a^2-2a-8<0 \to (a+2)(a-4)<0 \to -2<a<4$

(2)　$y=0$ を代入して、交点の x 座標 b を求めると

$$b=\frac{-a}{a^2-2a-8}$$

だが、 $a>0$ なら分子が負だから、分母が負、すなわち

$$-2<a<4 \text{ かつ } a>0$$

したがって

$$0<a<4$$

一方、 $a\leq 0$ なら分子が正または零だから、分母が正、すなわち

$$a<-2, 4<a \text{ かつ } a\leq 0$$

したがって

$$a<-2$$

$a=\sqrt{3}$ を b の式に代入すれば

$$b=\frac{-a}{a^2-2a-8}=\frac{-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}-8}=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}$$

【2】(1) 32 は 4 の倍数であり、6 の倍数でなく、24 の倍数でない。よって

$$32\in P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}$$

だが、 $P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}\subset P\cap\bar{Q}$ だから②が正解。

（蛇足： $R\subset Q$ だから $\bar{Q}\subset\bar{R}$ よって $P\cap\bar{Q}\subset P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}$ したがって $P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}=P\cap\bar{Q}$)

(2)　$P\cap Q$ は 4, 6 の公倍数だから、12 の倍数である。そのうち正で最小のものは 12 である。12 は 24 の倍数でない。よって

$$12\notin R$$

(3) 反例とは、前提を満たすが結論を満たさないものである。

まず前提を見よう。

⓪:(p かつ q) = 12 の倍数、　①:(p または q) = 4 または 6 の倍数、

②:r = 24 の倍数、　③:(p かつ q) = 12 の倍数

12 は②を満たさないから②は答でない。

次に結論を見よう。

⓪: $\bar{r}$ = 24 の倍数でない、　①: $\bar{r}$ = 24 の倍数でない、

②:(p かつ q) = 12 の倍数、　③:r = 24 の倍数

この中で 12 が満たさないのは③のみである。よって答は③だ。(前提を検討する必要はなかった。)

【3】(1) 頂点の x 座標は c と $c+4$ の真ん中で $c+2$ である。よって平行移動したグラフの式は

$$y=(x-c-2)^2+q$$

ところが $(c, 0)$ を通るから $0=4+q$ だから G の式は

$$y=(x-c-2)^2-4=x^2-2(c+2)x+c(c+4) \quad \cdots\cdots(*)$$

所与の線分がGと交わるということは、 $-3\leq y(3)\leq 0$ ということだ。

$y(3)=3^2-6(c+2)+c(c+4)=c^2-2c-3$ だから、これ、すなわち

$$c^2-2c=c(c-2)\geq 0 \quad かつ \quad c^2-2c-3=(c+1)(c-3)\leq 0$$

よって

$$c\leq 0,2\leq c \quad かつ \quad -1\leq c\leq 3$$

したがって

$$-1\leq c\leq 0,2\leq c\leq 3$$

(2) (*) に $(3,-1)$ を代入して

$$-1=9-6(c+2)+c(c+4)\to c^2-2c-2=0\to c=1+\sqrt{3}(2\leq c\leq 3)$$

(*) より分かるように、移動距離は x 方向に $c+2=3+\sqrt{3}$, y 方向に -4 である。

y 切片は $y(0)=c(c+4)=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=8+6\sqrt{3}$

【答】アイ＝－2, ウ＝4, エ＝0, オ＝4, カキ＝－2, ク＝5, ケ＝3, コ＝6, サシ＝13, ス＝②, セソ＝12, タ＝④, チ＝③, ツ＝2, テ＝4, ト＝1, ナ＝0, ニ＝2, ヌ＝3, ネ＝3, ノ＝3, ハヒ＝－4, フ＝8, ヘ＝6, ホ＝3

【第2問】

【1】(1) 余弦定理から $BD^2=BC^2+CD^2-2\mathrm{BC}\cdot CD\cos\angle BCD=8+2-8\cdot\frac{3}{4}=4$ だから

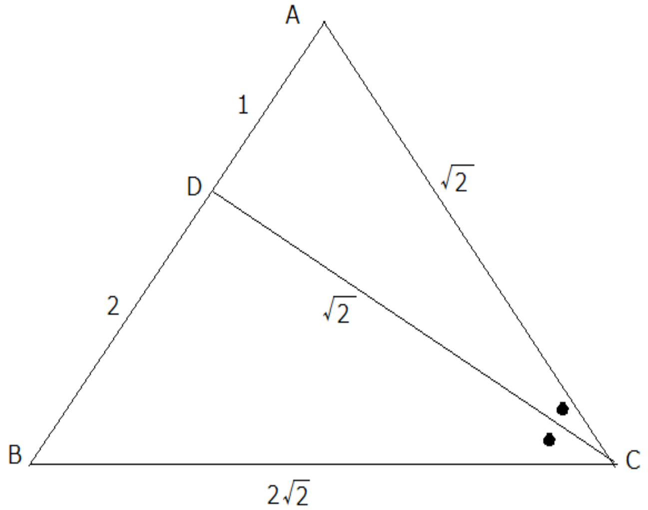
$$BD=2$$

余弦定理から $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2\cdot BD\cdot CD}=\dfrac{4+2-8}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ だから

$$\sin\angle ADC=\sin\angle BDC=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

正弦定理より $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\cdots$ だから $AC:AD=\dfrac{\sqrt{14}}{4}:\sin\angle ACD$ だが

$\sin\angle ACD=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ なので $AC:AD=\dfrac{\sqrt{14}}{4}:\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{2}:1\to\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{2}$



余弦定理より　$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2\mathrm{AC}\cdot CD\cos\angle ACD = 2\mathrm{AD}^2 + 2 - 4AD\cdot\frac{3}{4}$　だから

$$AD^2 - 3AD + 2 = (AD-1)(AD-2) = 0 \to AD = 1,2$$

ここでもし AD=2 だと　$AC = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{2} = BC$　で CD は二等辺三角形の垂線になってしまい、
$\cos\angle BDC = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$　に矛盾する。したがって　$AD = 1, AC = \sqrt{2}$

△ABC のどれでもいいから 1 つの角を求めて外接円の半径を求める。例えば

$$\cos\angle ACB = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 3^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{8} \to \sin\angle ACB = \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{3}{3\sqrt{7}/8} = \frac{8}{\sqrt{7}} \to R = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

【2】(1) 例えば 98 人が零点で、1 人だけ 99 点だったテストを考える。平均は 1点だ。
でも　$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$　だから⓪はウソ。四分位範囲も 0 だけど、標準偏差は正だから②もウソ。
中央値　$Q_2 = 0$　より小さい点数は皆無だから、②もウソ。④では　$Q_1 = 0$　より小さい 0 個と
$Q_3 = 0$　より大きい 99 点の 1 個を除くと、残りは 98 個だ。④もウソ。
すると消去法で正解は③と⑤ということになる。
③について。たしかに　Q_2　は 50 番目のデータ値で　Q_1　は 25 番目のデータ値であるが、最大値を 1 つ除くと　Q_2　は 49 番と 50 番のデータ値の真ん中で　Q_1　は 25 番目のデータ値である。
ということは　Q_1　は変化しない。③はホント。
⑤について。　Q_1　より小さいデータ値を削除すれば新 min ＝旧　Q_1　。
同様に新 max ＝旧　Q_3　である。よって

新範囲 ＝ 新 max－新 min＝旧　Q_3　－旧　Q_1　＝旧四分位範囲

⑤はホント。

(2) 四分位範囲はひげを除いた箱の長さのことである。P10 の県を見ると 80.9-79.5＝1.4 くらい。どう見ても 1 以下ではない。(I) は誤。
中央値は箱の中の太めの縦線のことであるが、上から下に見ていくと右に行ったり左に戻ったりしている。(II) も誤。
P1 の 7 max は 79.3 くらい、P47 の min は 81.2 くらい。差は 1.9 くらい。どう見ても 1.5 以上だ。正。
だから⑥ということになる。

(3) min に注目。min=79.5～80.0 だから、⓪③④⑤のどれかだ。
max に注目。max=81.5～82.0 だから、④⑥⑦のどれかだ。両方の情報から④しかない。

(4) 5 本の直線は　$y = x + m, m = 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5$　だが、1 番右の直線と 2 番目の直線の間に挟まれたデータは切片が 5.5～6.0 のヒストグラムの縦棒に対応している。このエリアの白丸を数えると 9 個ある。ヒストグラムの 1 番左の縦棒の高さが 9 であるものは③しかない。これが答だ。

【答】ア＝2, イウ＝14, エ＝4, オ＝2, カ＝1, キ＝4, ク＝7, ケ＝7, コサ＝③⑤, シ＝⑥,
ス＝④, セ＝③

【第3問】【1】⓪　$1-(\frac{1}{2})^5=\frac{31}{32}=0.96\cdots>0.95$　正しい。

① この結果から分かることは赤が 1～7 個あるということだから、確率は　$\frac{1}{8}\sim\frac{7}{8}$　であるとしか分からない。

② 取り出し方の総数が　${}_5C_2=10$　で、同じ文字の出方は「ろろ」,「はは」の 2 通りだから、求めるべき確率は　$1-\frac{2}{10}=\frac{4}{5}$　正しい。

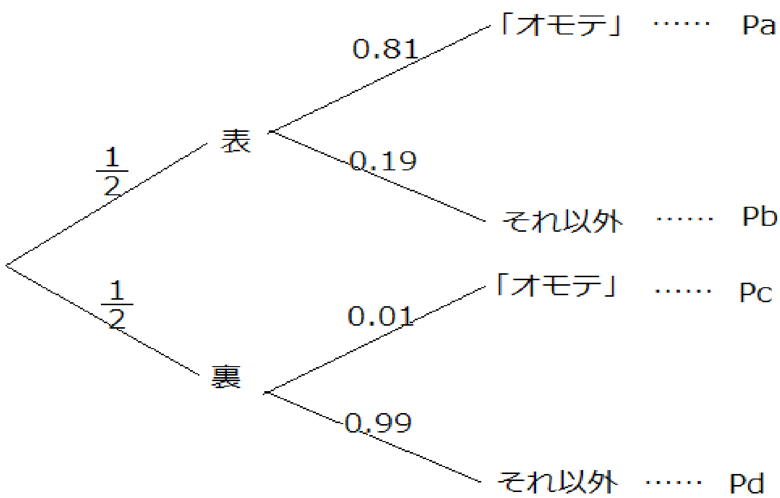
これで④は検討する必要がない（センター試験の反教育性！）のだが、一応検討しよう。

　　2体とも正しいことを言う確率＝　$0.9\times0.9=0.81$

　　2体ともマチガイを言う確率＝　$0.1\times0.1=0.01$

　　1体だけ正しいことを言う確率＝　$1-(0.81+0.01)=0.18$

に注意して樹形図を描く。



求めるべき条件付き確率は　$p=\frac{Pa}{Pa+Pc}=\frac{0.81/2}{0.81/2+0.01/2}=\frac{81}{82}=0.98\cdots>0.9$　ウソ。

【2】(1)「－1→－1」しかない。(なぜなら＋2点が　x　回で、－1点が　y　回なら

　　$2x-y=2x-(2-x)=-2\rightarrow x=0$

で＋2点は1回も出ないから。) 確率は　$(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

次の確率は「＋2→－1」「－1→＋2」の2通りあるから確率は　$2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$

(2) 持ち点0は　$2x-y=0, 1\le x+y\le5\rightarrow(x,y)=(1,2)$　より 1+2=3 回投げ終わった場合しかない。それは

　　「＋2→－1→－1」「－1→＋2→－1」「－1→－1→＋2」

の3通りあるから　${}_3C_1\times(\frac{1}{2})^3=3\times(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$

(3) 5回投げて持ち点4点になるのは　$2x-y=2x-(5-x)=4\rightarrow(x,y)=(3,2)$　だから

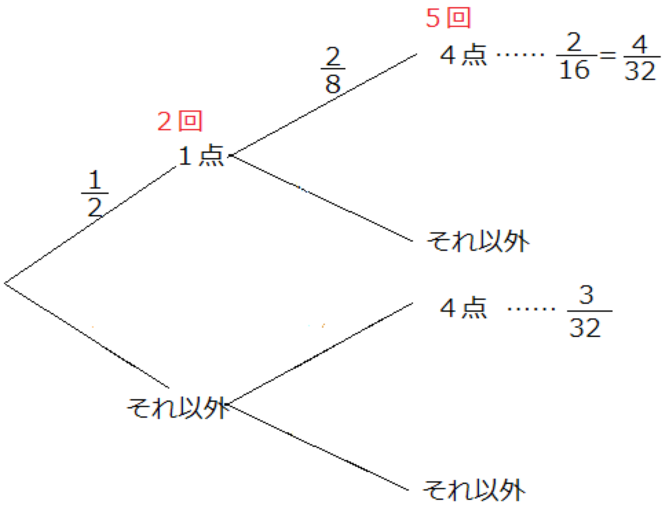
　　＋2，＋2，＋2，－1，－1

の5つを1列に並べればよい。ただし前問のような3回でゲームオーバーになる場合を除かないといけない。そうすると適正な並べ方は　${}_5C_3-{}_3C_1\times{}_2C_2=10-3\times1=7$　通りだ。具体的に列挙すれ

ば

　　「＋2→＋2→＋2→－1→－1」
　　「＋2→＋2→－1→＋2→－1」
　　「＋2→＋2→－1→－1→＋2」
　　「＋2→－1→＋2→＋2→－1」
　　「＋2→－1→＋2→－1→＋2」
　　「＋2→－1→－1→＋2→＋2」ダメ
　　「－1→＋2→＋2→＋2→－1」
　　「－1→＋2→＋2→－1→＋2」
　　「－1→＋2→－1→＋2→＋2」ダメ
　　「－1→－1→＋2→＋2→＋2」ダメ

である。確率は　$7\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{32}$



(4) また樹形図を描く。
2回目で1点になるのは(1)で求めたように
$\frac{1}{2}$　で、ここからあと3回

　　「＋2」「＋2」「－1」

を投げて4点にすればよいのだが、

　　「→－1→＋2→＋2」はダメ(3回でゲームオーバー)で
　　「→＋2→－1→＋2」
　　「→＋2→＋2→－1」

の2通り、　$2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2}{8}$　積の法則により、樹形図右上の確率は　$\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}=\frac{2}{16}=\frac{4}{32}$

これ以外の方法で4点になるのは(3)の答から差し引きして　$\frac{7}{32}-\frac{4}{32}=\frac{3}{32}$

よって求めるべき条件付き確率は　$\frac{4/32}{4/32+3/32}=\frac{4}{7}$

【答】アイ＝⓪②，ウ＝1，エ＝4，オ＝1，カ＝2，キ＝3，ク＝3，ケ＝8，コ＝7，サシ＝32，ス＝4，セ＝7

【第4問】(1)　$99x=234\rightarrow x=\frac{234}{99}=\frac{26}{11}$

(2)　$48y=2ab-2=2\times49+7a+b-2\rightarrow y=\frac{96+7a+b}{48}$

(i) 分母が 48 から 4 に変わるということは 12 で約分できるということだ。したがって

　　$96+7a+b$　は 12 の倍数

である。ただし　$0\leq a,b\leq6, a\neq b$　だから　$96+7a+b=108,120,132,144$

この中で 12 で割って奇数になるのは　$108=9\times12, 132=11\times12$　の2つだ。実際、

$y=\frac{108}{48}=\frac{9}{4}, y=\frac{132}{48}=\frac{11}{4}$

次にこれを満たす (a,b) の組を探す。

前者は $96+7a+b=108 \to 7a+b=12 \to (a,b)=(1,5)$

後者は $96+7a+b=132 \to 7a+b=36 \to (a,b)=(5,1)$

(ii) $y-2=\frac{96+7a+b}{48}-2=\frac{7a+b}{48}=\frac{1}{n}(n\geq 2)$

約分して分子が 1 になるということは

$7a+b$ は 48 の約数

だから $7a+b=1,2,3,4,6,8,12,16,24$ の9通りだ。しかし $a\neq b$ であったことに注意する。

上記9通りに対応する (a,b) の組を探そう。それは

$(a,b)=(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,6),(1,1),(1,5),(2,2),(3,3)$

だがゾロ目が3つあるから、これらを除いた 6 組が答だ。

【答】アイ＝26, ウエ＝11, オカ＝96, キク＝48, ケ＝9, コサ＝11, シス＝36, セ＝5, ソ＝1, タ＝6

【第5問】BC, AC は内分比が分かっているから△ABC にチェバの定理を使う。

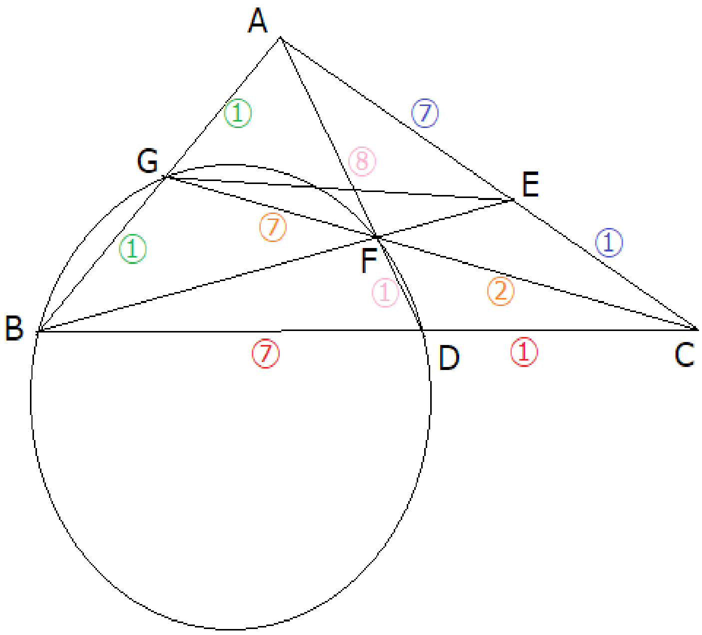
$$\frac{GB}{AG}\cdot\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CD}{BD}=1\to\frac{GB}{AG}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{7}=1\to\frac{GB}{AG}=1$$

BC, AC の内分比が分かっていて、AD の内分比を求めるのだから△ACD に棒が突き刺さったメネラウスの定理だ。

$$\frac{FD}{AF}\cdot\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BC}{BD}=1\to\frac{FD}{AF}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{8}{7}=1\to\frac{FD}{AF}=\frac{1}{8}$$

3番目もメネラウスだが、△ACG でも △BCG のどちらでもできる。前者でやってみよう。

$$\frac{FC}{GF}\cdot\frac{BG}{AB}\cdot\frac{AE}{CE}=1\to\frac{FC}{GF}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{1}=1\to\frac{FC}{GF}=\frac{2}{7}$$



面積を調べる。

$$\triangle CDG=\frac{1}{8}\triangle BCG \quad , \quad \triangle BFG=\frac{7}{9}\triangle BCG$$

だから $\dfrac{\triangle CDG}{\triangle BCG}=\dfrac{1/8}{7/9}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{9}{7}=\dfrac{9}{56}$

円が出てきたら方べきの定理だ。

$$AG\cdot AB=AF\cdot AD\to\frac{1}{2}AB\cdot AB=8\cdot 9\to AB=\sqrt{144}=12$$

次は $AE\cdot AC$ だが相似を使うと見当を付けて、そうすれば△AEG と △ABC だろうと分かる。実際、∠A が共通でこれを挟む辺の比がそれぞれ

$$AE:AG=3\sqrt{7}:6=\sqrt{7}:2 \quad , \quad AB:AC=12:\frac{8}{7}\cdot 3\sqrt{7}=\sqrt{7}:2$$

で等しいので相似だ。よって $AE:AG=AB:AC\to AE\cdot AC=AG\cdot AB=6\times 12=72$

等しい角は当然 $\angle AEG=\angle ABC$ で②だ。

（蛇足）本当はこれで終わらない。答は四択だが残り3つが不可であることを示さねばならない。受験生はそこまでしなくていいというのは極めてセンター試験的反教育行為だ。

⓪が不可なのは外角は内対角より大きいという定理から明らか。もし①だと、上の結論と合わせて△ABD は∠A を頂角とする二等辺三角形になるはずだが、2 辺が等しくならないので不可。もし③だと、上の結論と合わせて△ABD は∠D を頂角とする二等辺三角形になる。△BDG は直角三角形になり、BD, CD の長さが求まる。そこで $\cos B$ の値を余弦定理により △BDG と △ABC の両方を使って計算すると一致せず矛盾を生ずる。③も不可。

【答】ア＝1, イ＝1, ウ＝8, エ＝2, オ＝7, カ＝9, キク＝56, ケコ＝12, サシ＝72, ス＝②