【第1問】

【1】(1)　$a^2-2a-8<0 \to (a+2)(a-4)<0 \to -2<a<4$

(2)　$y=0$ を代入して、交点の x 座標 b を求めると

$$b=\frac{-a}{a^2-2a-8}$$

だが、 $a>0$ なら分子が負だから、分母が負、すなわち

$$-2<a<4 \quad かつ \quad a>0$$

したがって

$$0<a<4$$

一方、 $a\leq 0$ なら分子が正または零だから、分母が正、すなわち

$$a<-2, 4<a \quad かつ \quad a\leq 0$$

したがって

$$a<-2$$

$a=\sqrt{3}$ を b の式に代入すれば

$$b=\frac{-a}{a^2-2a-8}=\frac{-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}-8}=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}$$

(3)　$|f(1)+f(-1)|=|(a^2-2a-8+a)+(-a^2+2a+8+a)|=|2a|=1$ で $a<0$ だから

$$a=\frac{-1}{2}$$

このとき $f(x)=\frac{-27}{4}x-\frac{1}{2}$ は1次関数だから最大・最小値は端点において取る。それらは

$$f(-2)=\frac{27}{2}x-\frac{1}{2}=13 \quad , \quad f(2)=\frac{-27}{2}-\frac{1}{2}=-14$$

よって $-14\leq f(x)\leq 13$

【2】(1) 32 は 4 の倍数であり、6 の倍数でなく、24 の倍数でない。よって

$$32\in P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}$$

だが、 $P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}\subset P\cap\bar{Q}$ だから②が正解。

（蛇足： $R\subset Q$ だから $\bar{Q}\subset\bar{R}$ よって $P\cap\bar{Q}\subset P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}$ したがって $P\cap\bar{Q}\cap\bar{R}=P\cap\bar{Q}$ ）

50 は 4 の倍数でなく、6 の倍数でなく、24 の倍数でない。よって

$$50\in\bar{P}\cap\bar{Q}\cap\bar{R}$$

だから⑤が正解。

(2)　$P\cap Q$ は 4, 6 の公倍数だから、12 の倍数である。そのうち正で最小のものは 12 である。12 は 24 の倍数でない。よって

$$12\notin R$$

(3) 反例とは、前提を満たすが結論を満たさないものである。

まず前提を見よう。

⓪:(p かつ q) = 12 の倍数、　①:(p または q) = 4 または 6 の倍数、

②:r = 24 の倍数、　③:(p かつ q) = 12 の倍数

12 は②を満たさないから②は答でない。

次に結論を見よう。

⓪: $\bar{r}$ = 24 の倍数でない、　①: $\bar{r}$ = 24 の倍数でない、

②:(p かつ q) = 12 の倍数、　③:r = 24 の倍数
この中で 12 が満たさないのは③のみである。よって答は③だ。(前提を検討する必要はなかった。)

【答】アイ＝－2, ウ＝4, エ＝0, オ＝4, カキ＝－2, ク＝5, ケ＝3, コ＝6, サシ＝13,
スセソ＝－1／2, タチツ＝－14, テト＝13, ナ＝②, ニ＝⑤, ヌネ＝12, ノ＝④, ハ＝③

【第2問】
【1】(1) 2 次の係数＝1 >0 だから下に凸の放物線。共有点を持たないのは判別式が負のときだから、 $a^2-4b<0\to a^2<4b$

(2) $y=(x+1)^2-1-1=(x+1)^2-2$ で頂点の x 座標＝－1から遠いのは2の方だから
最小値＝－2、
最大値＝ $f(2)=2^2+2\times2-1=7$

【2】(1) 頂点の x 座標は c と $c+4$ の真ん中で $c+2$ である。よって平行移動したグラフの式は

$$y=(x-c-2)^2+q$$

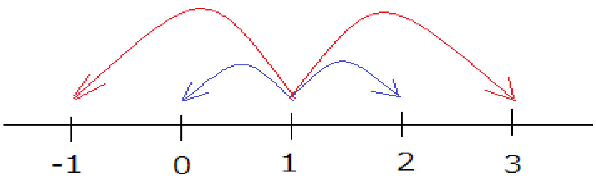
ところが $(c,0)$ を通るから $0=4+q$ だから G の式は

$$y=(x-c-2)^2-4=x^2-2(c+2)x+c(c+4)\quad\cdots\cdots(*)$$

これが $(3,k)$ を通れば

$$k=9-6(c+2)+c(c+4)=c^2-2c-3=(c-1)^2-4$$

k の最小値は－4である。
$-3\le k\le0$ を解くと $-3\le(c-1)^2-4\le0\to1\le(c-1)^2\le4\to1\le|c-1|\le2$
数直線上1からの距離が1以上2以内の点だから



$$-1\le c\le0,2\le c\le3$$

(2) (*) に $(3,-1)$ を代入して

$$-1=9-6(c+2)+c(c+4)\to c^2-2c-2=0\to c=1+\sqrt{3}(2\le c\le3)$$

(*) より分かるように、移動距離は x 方向に $c+2=3+\sqrt{3}$, y 方向に -4 である。
y 切片は $y(0)=c(c+4)=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=8+6\sqrt{3}$

【答】アイ＝①③, ウ＝⑥, エ＝2, オ＝4, カ＝1, キ＝4, クケ＝－4, コ＝1, サ＝0, シ＝2,
ス＝3, セ＝3, ソ＝3, タチ＝－4, ツ＝8, テ＝6, ト＝3

【第3問】

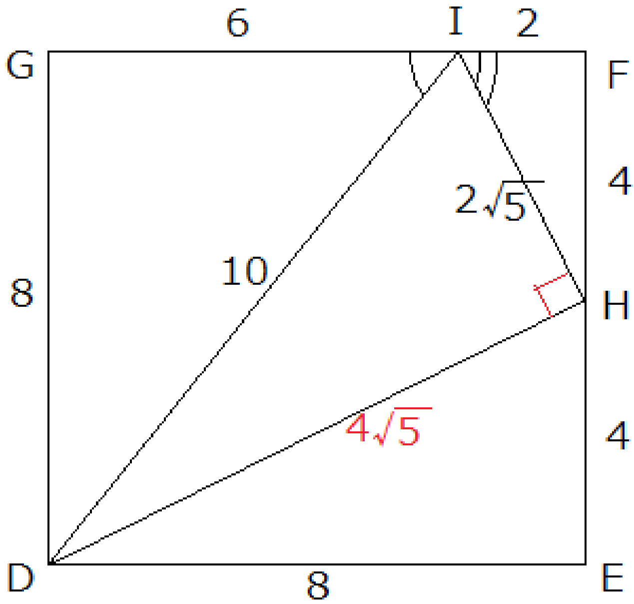
【1】(1) 余弦定理より　$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2\mathrm{AB}\cdot BC}=\dfrac{25+36-21}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{40}{60}=\dfrac{2}{3}$

よって　$\sin B=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　, 面積は　$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=5\sqrt{5}$

(2)(i)　$\cos\angle DIG=\dfrac{3}{5}\to\sin\angle DIG=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\dfrac{4}{5}$　より　$\dfrac{8}{DI}=\dfrac{4}{5}\to DI=10$　③だが、ついでに

$GI=DI\cos\angle DIG=10\cdot\dfrac{3}{5}=6$　を求めておく。　$IF=8-6=2$　となって

$FH=IF\tan\angle FIH=2\cdot2=4$　あとは三平方により　$HI=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$　①



あと、　$DH=4\sqrt{5}$　も求めて上図を描く。△DHI が直角三角形だと分かる。

(ii) 4 つの三角形の3辺の比を求めると

　$\triangle DEH\to1:2:\sqrt{5}$

　$\triangle DGI\to3:4:5$

　$\triangle DHI\to1:2:\sqrt{5}$

　$\triangle HFI\to1:2:\sqrt{5}$

だから　$\triangle HFI$　と相似なのは　$\triangle DEH$　と　$\triangle DHI$　①

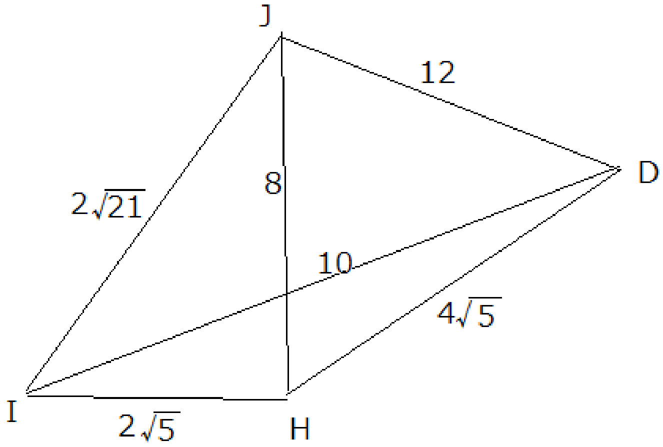
また、∠DHI は直角だから、　$\cos\angle DIH=\dfrac{2\sqrt{5}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　これは　$\cos\angle DIG=\dfrac{3}{5}$　より小さい値だが、

余弦は減少関数だから角の大小は、∠DIG < ∠DIH

(iii) ∆DHI が直角三角形だから　DI が外接円の直径だと分かる。半径は 5 となる。

内接円の半径　r　は　$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$　から求める。

$$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=\frac{1}{2}(4\sqrt{5}+2\sqrt{5}+10)r\to r=\frac{40}{6\sqrt{5}+10}=3\sqrt{5}-5$$



IJ, DJ は三平方により求める。△IDJ の3辺比は $10:12:2\sqrt{21}$ で、これは冒頭の三角形の $5:6:\sqrt{21}$ と同じだから相似だ。相似比は 2 倍だから面積比は 2 乗で 4 倍になる。(1) の答の $5\sqrt{5}$ の 4 倍で面積は $20\sqrt{5}$ である。四面体の体積はどこを底面と考えても、底面積×高さ÷3 だから

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}\right)\cdot 8=\frac{1}{3}\cdot 20\sqrt{5}\cdot HK \to 8=\sqrt{5}\,HK \to HK=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

【答】ア＝2, イ＝3, ウ＝5, エ＝3, オ＝5, カ＝5, キ＝③, ク＝①, ケ＝①, コ＝③, サ＝5, シ＝3, ス＝5, セ＝5, ソタ＝20, チ＝5, ツ＝8, テ＝5, ト＝5

【第 4 問】

(1) 例えば 98 人が零点で、1 人だけ 99 点だったテストを考える。平均は 1点だ。

でも $Q_1=Q_2=Q_3=0$ だから⓪はウソ。四分位範囲も 0 だけど、標準偏差は正だから②もウソ。

中央値 $Q_2=0$ より小さい点数は皆無だから、②もウソ。④では $Q_1=0$ より小さい 0 個と $Q_3=0$ より大きい 99 点の 1 個を除くと、残りは 98 個だ。④もウソ。

すると消去法で正解は③と⑤ということになる。

③について。たしかに Q_2 は 50 番目のデータ値で Q_1 は 25 番目のデータ値であるが、最大値を 1 つ除くと Q_2 は 49 番と 50 番のデータ値の真ん中で Q_1 は 25 番目のデータ値である。ということは Q_1 は変化しない。③はホント。

⑤について。 Q_1 より小さいデータ値を削除すれば新 min ＝旧 Q_1 。

同様に新 max ＝旧 Q_3 である。よって

新範囲 ＝ 新 max－新 min = 旧 Q_3 －旧 Q_1 ＝旧四分位範囲

⑤はホント。

(2) 四分位範囲はひげを除いた箱の長さのことである。P10 の県を見ると 80.9-79.5＝1.4 くらい。どう見ても 1 以下ではない。(I) は誤。

中央値は箱の中の太めの縦線のことであるが、上から下に見ていくと右に行ったり左に戻ったりしている。(II) も誤。

P1 の 7 max は 79.3 くらい、P47 の min は 81.2 くらい。差は 1.9 くらい。どう見ても 1.5 以上だ。正。だから⑥ということになる。

(3) min に注目。min=79.5～80.0 だから、⓪③④⑤のどれかだ。
max に注目。max=81.5～82.0 だから、④⑥⑦のどれかだ。両方の情報から④しかない。

(4) 5 本の直線は　$y=x+m, m=5.5,6,6.5,7,7.5$　だが、1 番右の直線と 2 番目の直線の間に挟まれたデータは切片が 5.5～6.0 のヒストグラムの縦棒に対応している。このエリアの白丸を数えると 9 個ある。ヒストグラムの 1 番左の縦棒の高さが 9 であるものは③しかない。これが答だ。

(5) 昭和 25 年の変動係数は

$$V=\frac{20.1}{27.2}=0.7\cdots>0.509$$

だから、②
平均、分散、標準偏差はそれぞれ

$$E(aX+b)=aE(X)+b, V(aX+b)=a^2V(X), S(aX+b)=|a|S(X)$$

になるという公式がある。100 倍なら　$a=100, b=0$　だから

$$E(100X)=100E(X), S(100X)=100S(X)$$

よって新たな変動変数は　$V'=\frac{100S(X)}{100E(X)}=S\frac{(X)}{E}(X)=V$　で旧変動係数と変わらない。①
一方、100 を足したときは　$a=1, b=100$　だから

$$E(X+100)=E(X)+100, S(X+100)=S(X)$$

よって新たな変動変数は　$V'=\frac{S(X)}{E(X)+100}<\frac{S(X)}{E(X)}=V$　で旧変動係数より小さくなる。⓪

【答】アイ＝③⑤, ウ＝⑥, エ＝④, オ＝③, カ＝②, キ＝①, ク＝⓪