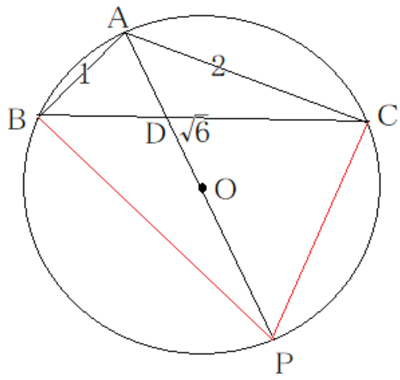
【第 1 問】(1) 余弦定理から

$$\cos\angle BAC=\frac{|\vec{AB}|^2+|\vec{AC}|^2-|\vec{BC}|^2}{2|\vec{AB}||\vec{AC}|}=\frac{1+4-6}{2\times1\times2}=-\frac{1}{4}\quad ,$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cos\angle BAC=1\cdot2\cdot(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}\quad (答)$$



(2) 円周角の定理から、AB⊥BP, AC⊥CP だから

$$\vec{AB}\cdot\vec{BP}=\vec{AB}\cdot((s-1)\vec{AB}+t\vec{AC})=(s-1)|\vec{AB}|^2+t\vec{AB}\cdot\vec{AC}$$
$$=s-1-\frac{1}{2}t=0\quad ,$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{CP}=\vec{AC}\cdot(s\vec{AB}+(t-1)\vec{AC})=s\vec{AB}\cdot\vec{AC}+(t-1)|\vec{AC}|^2$$
$$=-\frac{1}{2}s+4(t-1)=0$$

あとは $2s-t-2=0,\ s-8t+8=0$ の連立方程式を解いて $s=\frac{8}{5},t=\frac{6}{5}$ (答)

(3) $\vec{AD}=k(s\vec{AB}+t\vec{AC})=\frac{8}{5}k\vec{AB}+\frac{6}{5}k\vec{AC}$ であり、点 D が BC 上にあるから

$\frac{8}{5}k+\frac{6}{5}k=1\rightarrow k=\frac{5}{14}$ よって $\vec{AD}=\frac{4}{7}\vec{AB}+\frac{3}{7}\vec{AC}$

$|\vec{AD}|^2=\frac{1}{49}(16|\vec{AB}|^2+24\vec{AB}\cdot\vec{AC}+9|\vec{AC}|^2)=\frac{1}{49}(16-12+36)=\frac{40}{49}$ となるので

$|\vec{AD}|=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (答)

【第 2 問】(1) 直線 l の方程式は $y=-\frac{16}{9}x+\frac{1}{9}$ すなわち $16x+9y=1$ だが、ここで x,y をともに整数にしたものが格子点である。 $16,9$ は互いに素であることに注意して、この不定方程式を解こう。まず目の子で $16\cdot(-5)+9\cdot 9=1$ という特殊解が見つかり、問題の方程式と辺々引き算して

$$16(x+5)+9(y-9)=0$$

$16(x+5)=-9(y-9)=16\cdot 9k$ とおいて

$$x=9k-5,\ y=-16k+9$$

なる一般解を得る。よって格子点の座標は $(9k-5,-16k+9)$ (答)

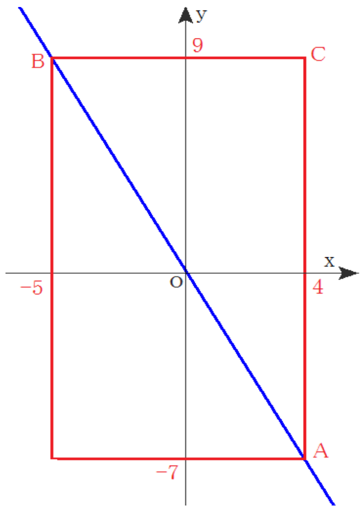
(2) 原点との距離は

$$d^2=x^2+y^2=(9k-5)^2+(-16k+9)^2=337k^2-378k+\cdots=337\left(k-\frac{189}{337}\right)^2+\cdots$$

となるので、最近とその次に近い格子点は $k=0,1$ のいずれかだ。($0<\frac{189}{337}<1$ より)

$$k=0,(x,y)=(-5,9),\ d^2=25+81=106\ ,$$
$$k=1,(x,y)=(4,-7),\ d^2=16+49=85$$

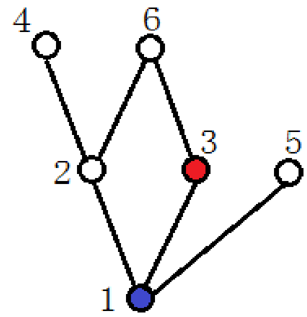
だから $A=(4,-7),\ B=(-5,9)$ (答)



右図において長方形の対角線上にある格子点は A, B の 2 点のみだから右上の三角形(＝左下の三角形) の周上および内部にある格子点の個数は、長方形のそれの約半分。「約」というのは A, B がダブルにカウントされるからだ。よって求めるべき格子点の個数は

$$\frac{\{4-(-5)+1\}\{9-(-7)+1\}+2}{2}=\frac{10\times 17+2}{2}=86 \quad (答)$$

【第 3 問】(1) 約数・倍数の関係は右図の通り。3 が最大公約数になるということは、5 が 1 回でも出たらダメだし、2,4,6 が 1 回でも出たらダメだ。また、1 が 1 回でも出たらダメということも分かる。結局、出ていいのは 3,6 だけで、6 のみが出るのを例外とする。



ア) 3,6 の 2 種類だけ出るのは $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{6}\right)^n$

イ) 6 のみ出るのは $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

差し引きして、 $\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{2^n-1}{6^n}$ (答)

(2) 余事象を考えるのが楽。最大公約数>1 になるのは、

ア) 5 のみが出る(d=5) $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

イ) 3, 6 のみが出る(d=3, 6) $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}=\left(\frac{2}{6}\right)^n$

ウ) 2,4,6 のみが出る(d=2, 4, 6) $\sum_{k+l+m=n}\frac{n!}{k!l!m!}\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^l\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^m=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{3}{6}\right)^n$

エ) 6 のみが出る(d= 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

差し引きして、 $\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{2^n-1}{6^n}$

これが余事象だから、求めるべき確率は $1-\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n\right\}=\frac{6^n-2^n-3^n}{6^n}$ (答)

(3) $20=2\times2\times5$ だから、1,2,4,5 のみが出ればよいように見えるが、4,5 はいずれも少なくとも 1 回出ないとダメ。「1,2,4,5 のみが出る」事象の中で、「4 が出ない」または「5 が出ない」の余事象を考えればよい。ここで、「4 も 5 も出ない」事象を引きすぎるないように注意。

ア) 1,2,4,5 のみが出る

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

イ) 4 が出ない(＝1,2,5 のみが出る)

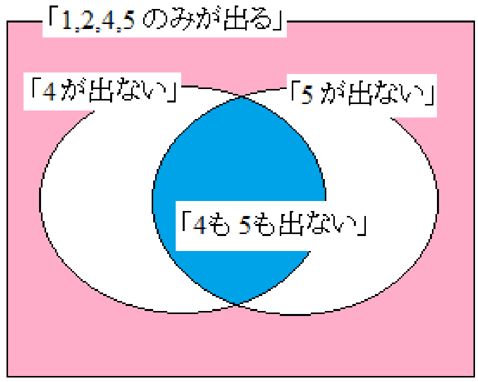
$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{3}{6}\right)^n$$

ウ) 5 が出ない(＝1,2,4 のみが出る)

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{3}{6}\right)^n$$

エ) 4 も 5 も出ない(＝1,2 のみが出る)

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{6}\right)^n$$



差し引きして、 $\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}=\frac{4^n-2\times3^n+2^n}{6^n}$ (答)

【第 4 問】(1)　$g(x)=f(x)-x$　とおけば　$g(0)=f(0)-0=0, g(1)=\sin\frac{\pi}{2}-1=0$　であり

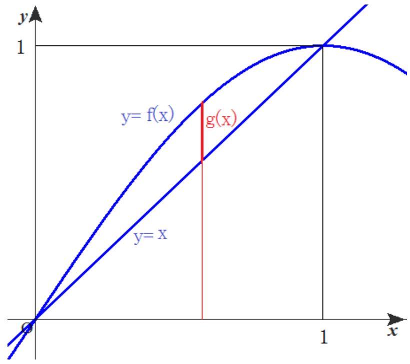
$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-1=\frac{\pi}{2}(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{\pi})$$

$\cos\frac{\pi x}{2}$　という関数は　$0\le x\le 1$　において単調減少で　$\cos\frac{\pi 0}{2}=1, \cos\frac{\pi 1}{2}=0$　であり、

$1>\frac{2}{\pi}=\frac{2}{3.14}>0$　だから　$\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}$　となる点が 1 つだけある。それを　$x=x_0$　とする。

$g(x)$　の増減表は右のようになり、最小値は
$g(0)=g(1)=0$　だから、　$0<x<1$　においては
$g(x)=f(x)-x=\sin\frac{\pi x}{2}-x>0$

x	0	…	x_0	…	1
g'		+	0	−	
g	0	↗		↘	0



数学的帰納法を使って証明する。

I) n=1 のとき　$a_n=a_1=\alpha\to 0<a_1<1$　であり

$$a_2-a_1=f(\alpha)-\alpha>0$$

II)　n=k のとき命題が成り立つとすれば　$0<a_k<1$
だから

$$0<a_{k+1}=f(a_k)=\sin\frac{\pi a_k}{2}<1$$

よって　$a_{k+2}-a_{k+1}=f(a_{k+1})-a_{k+1}>0$　となり、
n=k+1 のときにも命題が成り立つ。■

(2) 傾き　$\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$　が単調減少であることを言う。

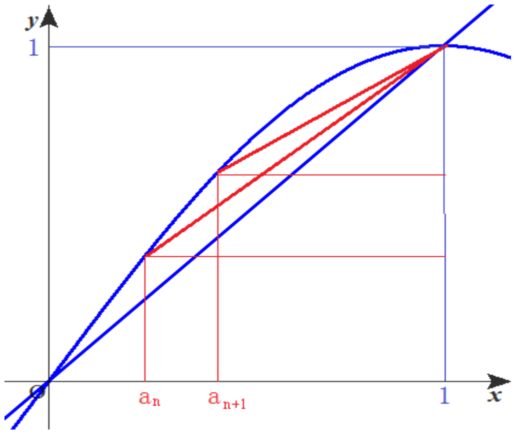
曲線　$y=f(x)$　と直線　$y=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}(x-1)+1$　と

の差を考える。

$$h(x)=f(x)-\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}(x-1)-1$$

とおけば　$h(a_n)=0, h(1)=0$　であり

$$h'(x)=f'(x)-\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-C$$



$\cos\frac{\pi x}{2}$　は単調減少だから　$h'(x_0)=0$　なる点が
ただ一つあって　$a_n<x_0<1$　である。右の増減表から分かるように　$a_n<x<1$　において

$$h(x)=f(x)-\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}(x-1)-1>0$$

x	a_n	…	x_0	…	1
h'		+	0	−	
h	0	↗		↘	0

$x=a_{n+1}$　を代入して　$f(a_{n+1})+\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}(1-a_{n+1})-1>0\to\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}>\frac{1-a_{n+2}}{1-a_{n+1}}\to b_n>b_{n+1}$　■

(3) 数列　$\{a_n\}$　は単調増加で上に有界、すなわち　$0<a_1<a_2<a_3<\cdots<1$　だから極限は有限確定値　$\lim a_n=\beta$　を持ち　$0<\beta\le 1$　である。　$a_{n+1}=f(a_n)$　より　$\beta=f(\beta)$　だから 2 曲線の交点として

$$\lim a_n=\beta=1\quad(答)$$

数列 $\{b_n\}$ の極限は定義式のままでは不定形の極限だから、変形する。

$$b(x)=\frac{1-f(x)}{1-x}=\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{1-x}$$

ここで $x=1-\frac{2}{\pi}\theta$ と変換して

$$=\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\frac{2}{\pi}\theta}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\pi\,\theta}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$n\to\infty$ とするならば $x=a_n\to1,\theta\to0$ だから $\lim b_n=\frac{\pi\,0}{2}\cdot1^2\cdot\frac{1}{1+1}=0$ (答)

【第 5 問】(1) 与式の左辺に、」公式 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$ を使って

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt=\frac{f'(x)}{\{1-f(x)\}f(x)}=a\quad,$$

$$\{\frac{1}{1-f(x)}+\frac{1}{f(x)}\}f'(x)=a\quad,$$

$$-\log\{1-f(x)\}+\log f(x)=a\quad,$$

$$\log\frac{f(x)}{1-f(x)}=a\,x+C\quad,$$

$$\frac{f(x)}{1-f(x)}=e^{a\,x+C}=Ae^{a\,x}$$

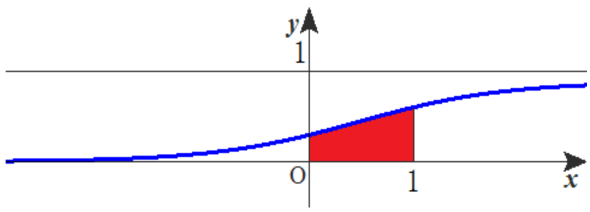
ところで初期条件 $f(0)=\frac{1}{3}$ を使って $A=\frac{1}{2}$ だから $\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{1}{2}e^{a\,x}$

$$(2+e^{a\,x})f(x)=e^{a\,x}\to f(x)=\frac{e^{a\,x}}{2+e^{a\,x}}\quad(答)$$

(2) $S(a)=\int_0^1\frac{e^{a\,x}}{2+e^{a\,x}}dx$

$$=[\frac{1}{a}\log(2+e^{a\,x})]_0^1$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{2+e^a}{3}$$



(3) $\lim S(a)=\lim\frac{\log(2+e^a)-\log3}{a-0}$ だが、ここで $g(a)=\log(2+e^a)$ とおくと、

$$\lim S(a)_{a\to+0}=\lim_{a\to+0}\frac{g(a)-g(0)}{a-0}=g'(0)$$

これは微分係数の定義そのものであるからである。微分してみると

$$\frac{d}{da}g(a)=\frac{d}{da}\log(2+e^a)=\frac{e^a}{2+e^a}\quad,\quad\frac{d}{da}g(a)_{a=0}=\frac{1}{3}\quad(答)$$